Seja $\sigma \in S_n$ uma permutação

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$ fixado $1 \leq i \leq n$

Considere $\{\sigma(i), \sigma^2(i), \dots, \sigma^m(i), \dots\}$

Este conjunto é órbita de i na ação

$$\langle\sigma\rangle \times \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$$

$$(\sigma^j, i) \longmapsto \sigma^s(i)$$

σ é dito um <u>ciclo</u> se a órbita de i é $\{1, 2, \dots, n\}$

Exemplo $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $n = 4$

$i = 2$ $\{2, \sigma(2), \sigma^2(2), \sigma^3(2)\}$

$= \{2, 1, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$

Logo σ é um ciclo

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \tilde{n} \text{ é ciclo}$$

$$i = 3 \longrightarrow \{3, \sigma(3), \sigma^2(3), \sigma^3(3), \sigma^4(3)\} =$$

$$\{3, 2, 1, 3, 2\} = \{1, 2, 3\}$$

$i = 4$

$$\{4, \sigma(4), \sigma^2(4), \sigma^3(4), \sigma^4(5)\} =$$

$$= \{4, 5, 4, 5, 4\} = \{4, 5\}$$

Mas $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_{\underset{2}{\cancel{1}}} \circ \sigma_{\underset{1}{\cancel{2}}}$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } \sigma_2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Pode-se pensar σ_1 & σ_2 como ciclos sobre os conjuntos $\{1,2,3\}$ & $\{4,5\}$ respectivamente

<u>Lema</u> Dada σ S_n existem ciclos $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ tal que

1) $\sigma_i \circ \sigma_j = \sigma_j \circ \sigma_i \quad \forall\, 1 \leq i, j \leq r$

2) $\sigma = \sigma_1 \circ \dots \sigma_r$

Fixos por σ

<u>Ex</u>

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 2 & 6 & 3 & 4 & 5 & 1 & 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

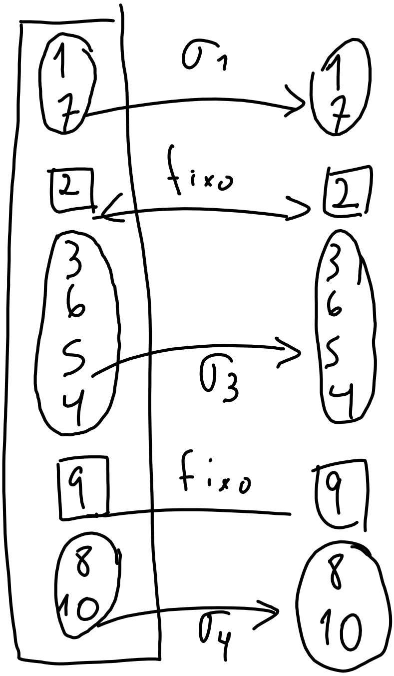
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 4 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 = \boxed{(1\ 7)}$$

$$\sigma_3 = (3\ 6\ 5\ 4)$$

$$\sigma_4 = (8\ \ 10)$$

$$\boxed{\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4}$$



$$\{1,\dots,10\} = \underset{\{1,7\}}{X_1} \,\dot\cup\, \underset{\{2\}}{X_2} \,\dot\cup\, \underset{\{3,6,5,4\}}{X_3} \,\dot\cup\, \overset{\{9\}}{X_4} \,\dot\cup\, \overset{\{8,10\}}{X_5}$$

Cada X_i é $\boxed{\sigma\text{-invariante}}$

isto é se $x \in X_i \Rightarrow \sigma(x) \in X_i$

Um ciclo é dito uma <u>transposição</u> se $\sigma = (\underset{i_1\, i_2}{\cancel{L_1\, L_2}})$, ou seja, σ move apenas dois símbolos

Ex $\sigma = (1\ 2)$ $\sigma = (3\ 10)$ $\sigma = (7\ 101)$

No exemplo anterior σ_1 & σ_4 são transposições

Exemplo

$\sigma = (1\ 2\ 3)$

ou seja

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\sigma_1 = (1\ 3)$ & $\sigma_2 = (3\ 2)$

Então

$$\sigma = \sigma_2 \circ \sigma_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 \circ \sigma_1(1) = \sigma_2(\sigma_1(1))$$
$$= \sigma_2(3) = 2$$

$$\sigma_2 \circ \sigma_1(2) = \sigma_2(\sigma_1(2)) = \sigma_2(2) = 3$$

$$\sigma_2 \circ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3) = \sigma$$

$$\boxed{\sigma \circ \sigma_1 = \sigma}$$

ou seja σ é produto de transposições

OBS.: é falso que $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$

1) Exercício

Dado ~~s~~ um ciclo $\sigma = (i_1, i_2, \dots i_k)$

Existem transposições $\sigma_1 \dots \sigma_\ell$ tq

$$\boxed{\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \dots \sigma_\ell}$$

Lema + Exercício

$\Downarrow$

Teorema Dado $\sigma \in S_n$ existem transposições

$\sigma_1, \dots, \sigma_r$ t.q.

1. $\sigma = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_r$
2. O número r é tal que se $\sigma = \sigma_1' \cdots \sigma_{r'}'$,

para outras transposições então

$r \equiv r' \pmod 2$

Definição

$\mathrm{sig}(\sigma) := (-1)^r$ é chamado o sinal de σ

$\boxed{(-1)^r = (-1)^{r'}}$

Logo $\mathrm{sig}(n) : S_n \longmapsto (\{\pm 1\}, \cdot)$

é um grupo

$\sigma \longmapsto \mathrm{sign}(\sigma)$

é um homomorfismo de grupos ou seja

$$\boxed{\mathrm{sign}(\sigma_1 \cdot \sigma_2) = \mathrm{sign}(\sigma_1) \cdot \mathrm{sign}(\sigma_2)}$$

$A_n := \mathrm{Ker}(\mathrm{sig}(n))$

$\boxed{\text{o grupo alternado}}$

$A_n = \{\sigma \in S_n \mid \mathrm{sign}(\sigma) = 1\}$

$= \{\sigma \in S_n \mid \sigma$ é produto de um número par de transposições$\}$

~~22~~

23

$n \geq 2$

$\sigma = (1\ 2)$

$\text{sign}(\sigma) = (-1)^1 = -1$

Logo $\text{sign}: S_n \longrightarrow \{\pm 1\}$ é sobrejetora

$$\frac{|S_n|}{|A_n|} = |S_n / A_n| = |\{\pm 1\}| = 2$$

$$\Longrightarrow |A_n| = \frac{|S_n|}{2} = \frac{n!}{2}$$

$$\boxed{|A_n| = \frac{n!}{2}}$$

<u>Exemplo</u> $n = 3$

$$S_3 = \{ Id, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (3\ 2\ 1) \}$$

$\text{sign}(1 3) = -1$

$\text{sign}(1 2) = -1$

$\text{sign}(2 3) = -1$

$$|A_3| = \frac{3!}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$A_3 = \{ Id, (1\,2\,3), (3\,2\,1) \}$ (24

$(1\,2\,3) = (2\,3) \circ (3\,1)$

$(3\,2\,1) = (1\,2) \cdot (3\,1)$