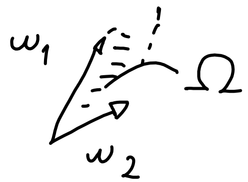
Tarefa

Sejam $\beta = \{w_1, w_2\} \subseteq \mathbb{C}$ t.q. β seja $\mathbb{R}$-L.I. e seja $\Gamma := \{n w_1 + m w_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$

$(\Gamma, +)$ é chamado um Lattice

a) Mostre que $\Gamma \cong (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$

b)



$$\Omega = \left\{ x w_1 + y w_2 \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \leq x < 1 \\ 0 \leq y < 1 \end{matrix} \right\}.$$

Mostre que $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}^2$ existe um único $z_\alpha \in \Omega$ t.q. $[z_\alpha] = [\alpha]$

onde $[\alpha]$ é a classe de α módulo Γ

c) Identifique $(\mathbb{R}^2, +)/\Gamma$ com um objeto geométrico

\# Prêmio Nobel $\longleftrightarrow$ Medalha Field

$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \equiv S_1(0)$

$\Gamma = \{2\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

$\left.\begin{matrix} \mathbb{R}/\Gamma \simeq S_1(0) \\ \text{Projeto de Thurston} \end{matrix}\right.$

\#

Seja $G \subset (\mathbb{R}, +)$

Mostre que acontece uma das coisas

a) $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ t.q. $G = \alpha\mathbb{Z} = \{\alpha n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

b) G é denso em $\mathbb{R}$, i.e., $\forall$ intervalo $I \subset \mathbb{R}$, $I \neq \emptyset$ $I \cap G \neq \emptyset$

c) Seja $\alpha = \sqrt{2}$

$G = \{n + m\alpha \mid n, m \in \mathbb{Q}\}$

Mostre que $(G, +) < (\mathbb{R}, +)$ e G é denso em $\mathbb{R}$.

III Dado $n \in \mathbb{N}$ & $G < (F_2^{\,n}, +)$

$F_2 = \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$, $F_2^{\,n} =$

$$\underbrace{F_2 \times \cdots \times F_2}_{n\text{-vezes}}$$

$V = \{(x_1, \dots, x_n) \in G \mid \text{um número ímpar dos } x_i \text{ é igual a } 1\}$

Mostre que $|V| = \frac{|G|}{2}$

Definição

G é um grupo de permutação se $\exists\ X$, um cjto e $\varphi : G \longrightarrow Sym(X)$ um homomorfismo injetor (monomorfismo) ou, grosseiramente, G é grupo de permutação ~~de~~ X t.q. $G < Sym(X)$

Teorema (Cayley)

Todo grupo é um grupo de permutação

Prova

Tome $X = G$ como conjunto

~~Do~~ Dado $g \in G$

$$\begin{aligned} \varphi_g : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto gx \end{aligned}$$

A.F.: φ_g é uma bijeção de X

4

$\varphi_g(x) = \varphi_g(y) \Rightarrow gx = gy \Rightarrow \cancel{x=y}$ $x = y$

Logo φ_g é 1-1 (inj.);

Dado $y \in X$ tome $x = g^{-1}y$

então $\varphi_g(x) = gx = g(g^{-1}y) = ey = y$

Logo φ_g é sobrejetora

Logo φ_g é bijeção & ∴

$\varphi_g \in Sym(X)$

Dados g_1 e $g_2 \in G$ $<$ $\left.\begin{matrix}\varphi_{g_1} \\ \varphi_{g_2}\end{matrix}\right\} \in Sym(X)$

$\varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2} : X \longmapsto X$

$\varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}(x) = \varphi_{g_1}(\varphi_{g_2}(x)) = \varphi_{g_1}(g_1 x)$

$= g_1(g_2 x) = (g_1 g_2)(x) = \varphi_{g_1 g_2}(x)$

$\forall x \in X$

Logo $\varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2} = \varphi_{g_1 g_2}$ *

Defina $\psi : G \longmapsto Sym(X)$

$g \longmapsto \varphi_g$

$\psi(g) := \varphi_g$

Temos $\psi(g_1 g_2) = \varphi_{g_1 g_2} \overset{*}{=} \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2} =$

$= \psi(g_1) \circ \psi(g_2)$

Logo, ψ é homomorfismo

$g \in \ker(\psi) \Rightarrow \psi(g) =$ elemento neutro de $Sym(X)$

$\Rightarrow$ ~~Son~~

é a função $Id : X \mapsto X$

$x \mapsto x$

a identidade

$\varphi g = \varphi(g) = Id \Rightarrow \varphi g(x) = Id(x)\ \forall x \in X$

$\forall x \in X$ $g x = x$ $\hookrightarrow g = e$ Daí $Ker(\varphi) = \{e\}$

Logo φ é injetora. O caso

$X = \{1, 2, \ldots, n\}$ $n \in \mathbb{N}$. Neste caso

escrevemos $Sym(X) = S_n$

$\sigma \in S_n$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

$\to$ domínio

$\to$ imagem da linha de cima

$n = 3$ S_3 $n = 5$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$\langle \sigma \rangle \times \{1, 2, 3, 4, 5\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$(\sigma^i, j) \mapsto \sigma^i(j)$

$$O_1 = \{\sigma^i(1) \mid 0 \leq i \leq o(\sigma)\} = \{1,3,2\} \ \angle 7$$

$$O_4 = \{\sigma^i(4) \mid 0 \leq i \leq o(\sigma)\} = \{4,5\}$$

$$O_1 \cup O_4 = X = \{1,2,3,4,5\}$$

$$Stab_G(1) = ?$$

$$Stab_G(4) = ?$$

$$|X| = \sum |O_{x_i}|$$

$$= \sum [G : Stab_G(x_i)]$$