Álg. 2 26/9 3

Continuação

X um conjunto

& $\mathrm{Sym}(X)$ seu grupo de simetrias

Tome $H < \mathrm{Sym}(X)$

$$H \times X \longmapsto X$$
$$(f, x) \mapsto f(x)$$

Dizemos que H age sobre X

Fixado $x \in X$

$$O_x := \{y \in X \mid \exists f \in H \text{ t.q. } y = f(x)\} =$$

a órbita de x relativo a H =

$$= \{f(x) \mid f \in H\}$$

Uma ~~rev~~ relação de ~~equiv~~ equivalência módulo H

Dados $x, y \in X$ então

$$x \sim y \iff \exists\, f \in H \text{ t.q. } y = f(x)$$

É relação de eq.:

$x \sim x$ pois $x = Id(x)$

$x \sim y \Rightarrow y = f(x)^{*} \Rightarrow x = f^{-1}(y) \Rightarrow y \sim x$

$$\begin{array}{ccccc} x \sim y & \& & y \sim z & \Rightarrow & z = (f \circ g)(x) \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \in \\ y = f(x) & & z = g(y) & & H \end{array}$$

* $f \in H \subset Sym(X) = \{ f : X \to X \mid f \text{ é bijeção} \}$

A classe de $x \in X$

$[x] = \{ y \in X \mid x \sim y \}$

$\quad = \{ y \in X \mid y = f(x),\ \exists f \in H \}$

$\quad = O_x$

Posso escrever $X = O_{x_1} \dot\cup \ldots \dot\cup O_{x_n}$ e

daí $|X| = \sum_{i=1}^{n} |O_{x_i}|$

Dado $x \in X$

$$\underset{H}{\mathrm{STAB}}(x) = \{ f \in H \mid f(x) = x \}$$

O estabilizador de x em H

1) $\mathrm{STAB}_H(x) < H$

2) $$|O_{x_i}| = \frac{|H|}{|\mathrm{Stab}_H(x_i)|}$$

$$= [H : \mathrm{STAB}_H(x_i)]$$

Daí $|O_x| \mid |H| \quad \forall x \in X$

Exemplo

$X = \mathbb{R}$

$H = \{ T \in \mathrm{Sym}(\mathbb{R}) \mid T$ é translação por $2\pi \times$ um nº inteiro $\}$

$T \in H \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Z}$ t.q.

$T(x) = x + 2\pi z$

$H = \{ T_z \mid z \in \mathbb{Z} \quad T_z(x) = x + 2\pi z \}$

$[0] = \{ T_z(0) \mid T_z \in H \}$

$= \{ 2\pi z \mid T_z \in H \} = \{ \pm 2\pi n, n \in \mathbb{N} \}$

$[x_0] = x_0 + 2\pi \mathbb{Z} = \{ x_0 + 2\pi z \mid z \in \mathbb{Z} \}$

Pergunta: o que representa o espaço das órbitas:

$\{ O_x \mid x \in X \} = X/H$?

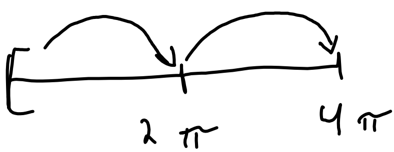
$[0] = [2\pi]$

A.F.:

$X/H = \{ [x] \mid x \in [0, 2\pi[\}$

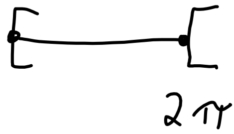
i) $\forall x \in X$

$|O_x \cap [0, 2\pi[| = 1$



Chame este elemento de α_x

$$X/H = \{\alpha_x \mid 0 \leq x < 2\pi\}$$

$=$ 

$$[0] = [2\pi]$$

Identificando 2π & 0

obtem-se $X/H \cong$