<u>Teorema</u> Seja G um grupo abeliano finito e $p \in \mathbb{N}$ um primo

$$G_p := \{ g \in G \mid o(g) \text{ é potência do } p \}$$

então $G_p < G$

<u>Observação</u>

O Teorema é falso se G ñ for abeliano

<u>Exemplo</u>

$G = S_3$, as simetrias do triângulo.

$G = \{ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6 \}$

Tome $p = 2$

$o(\varphi_1) = 1 = 2^0$ $\quad o(\varphi_5) = 3$

$o(\varphi_2) = 2$ $\quad o(\varphi_6) = 3$

$\varphi_3 = 2$

$\varphi_4 = 2$

Então $G_2 = \{ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \}$

$|G_2| = 4$ & Logo $|G_2| \nmid |G|$

Logo G_2 não é subgrupo, pois Lagrange de um subgrupo divide a ordem do grupo

Prova (do Teorema)

G_2 é subgrupo se

1) $G_2 \neq \emptyset$

2) $g_1, g_2 \in G_2 \Rightarrow g_1 g_2^{-1} \in G_2$

1) $G_2 \neq \emptyset$, pois $o(e) = 1 = p^0 \Rightarrow e \in G_2$

2) $g_1, g_2 \in G_2$

$\exists n \in \mathbb{N}$ tq $g_1^{p^n} = e$

$\exists m \in \mathbb{N}$ tq $g_2^{p^m} = e$

G abeliano $\Rightarrow$

$xy = yx$

$(xy)^2 = xyxy$

$\vdots \quad = xxyy = x^2y^2$

$(xy)^k = x^k y^k$

Teorema

Seja G um grupo abeliano finito e $p \in \mathbb{N}$ um primo . . .

Tome $x = g_1 \quad y = g_2^{-1} \quad k = p^{n+m}$

Então $(xy)^k = x^k y^k = g_1^{p^{n+m}} \cdot g_2^{p^{n+m}} =$

$= (g_1^{p^n})^{p^m} \cdot (g_2^{p^m})^{p^n} = e^{p^m} \cdot e^{p^n} = e$

Logo $o(xy)$ é um divisor de p^{n+m}

Logo $o(g_1 g_2)$ é potência de p.

$\hookrightarrow g_1 g_2 \in G_p$

G abeliano finito

$G_p \Rightarrow G_p < G \overset{\text{LANG.}}{\Rightarrow} |G_p| \mid |G| \Rightarrow g \in G$

$o(g) = |\langle g \rangle| \mid |G_p|$

$|G_p| \mid |G|$

$o(g) \mid |G| \quad \forall g \in G_p$

$\hookrightarrow$ potência de p

Assim se $G_p \supsetneq \{e\} \Rightarrow p \mid |G|$

<u>Recíproca</u>

<u>Teorema de Cauchy</u>

Seja G um grupo finito & p um divisor de $|G|$. Então $\exists g \in G$ t.q. $o(g) = p$.

Corolário

Seja G um grupo abeliano finito & p um primo Então

$$G_p \supsetneq \{e\} \iff p \mid |G|$$

G abeliano finito

$|G|$

$|G| = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$ (usando Álgebra I)

G_{p_1} G_{p_2} $\cdots$ G_{p_k}

Então

1) $|G_{p_j}| = p^{n_j}$

2) $G = G_{p_1} \times \dots \times G_{p_k}$

$\# \ \mathbb{V}$

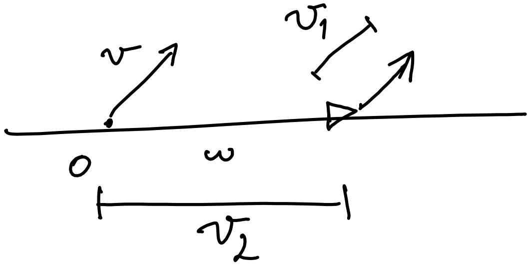
$\mathbb{W} = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$

i) $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 = \{ v_1 + v_2 \mid v_1 \in \mathbb{V}_1, \ v_2 \in \mathbb{V}_2 \}$

ii) $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 = (0)$

$\forall v \in W$ existem únicos $v_1 \in W_1$ & $v_2 \in W_2$
t.q. $v = v_1 + v_2$

#



$\langle v \rangle = W_1$

$\langle w \rangle = W_2$

$R^2 = W_1 \oplus W_2$

#

• se $i \neq j \Rightarrow G_{p_i} \cap G_{p_j} = \{e\}$

De fato: tome $g \in G_{p_i} \cap G_{p_j}$

$g \in G_{p_i}$ $\qquad$ $g \in G_{p_i}$

$o(g) \mid p_j^m$ $\quad$ $(i \neq j) \rightarrow mdc(p_i, p_j) = 1$ $\quad$ $o(g) \mid p_i^{n_i}$

$o(g) = 1 \Rightarrow g = e$

Exemplo

G abeliano $|G| = 60$. Como é G?

Sol.

$|G| = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

$p_1 = 2 \quad n_1 = 2$

$p_2 = 3 \quad n_2 = 1$

$p_3 = 5 \quad n_3 = 1$

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, no head] \arrow[d, no head] \arrow[dr, no head] & \\ G_{p_1} & G_{p_2} & G_{p_3} \end{tikzcd}$$

$|G_{p_1}| = 2^2 = 4 \qquad |G_{p_2}| = 3^1 = 3 \qquad |G_{p_3}| = 5^1 = 5$

$|G_{p_1}| = 4$

$$G_{p_1} \begin{cases} C_4 \\ C_2 \times C_2 \end{cases}$$

Seja H um grupo $|H| = 4$

Lagrange diz: se $h \in H \Rightarrow o(h) \in \{1, 2, 4\}$

Se $\exists\, h_0 \in H$ t.q. $o(h_0) = 4$ & olhe pra $\langle h_0 \rangle = \{e, h_0, h_0^2, h_0^3\} < H$ & tem a mesma ordem. Logo $\langle h_0 \rangle = H \Rightarrow H = C_4$

□ outro caso é

$H \ni h \neq e \Rightarrow o(h) = 2$

Tome $h_1 \neq h_2 \in H - \{e\}$

$\langle h_1 \rangle = \{e, h_1\}$

$\langle h_2 \rangle = \{e, h_2\}$

$\langle h_1 \rangle \cap \langle h_2 \rangle = e$

$h_1 \cdot h_2 \notin \langle h_1 \rangle \cup \langle h_2 \rangle$

Logo

$$H = \{\underbrace{e}_{h_1^0 h_2^0}, h_1, \overbrace{h_2}^{h_1^0 h_2^1}, \underbrace{h_1 h_2}_{h_1^1 h_2^1}\}$$

ou seja, todo $h \in H$ é do tipo $h = h_1^i h_2^j$

?(apagado)

<u>Lema</u>

Seja p um primo & H um grupo com $|H| = p$ Então $H \cong C_p$

(Prova) $e \neq g \in H \Rightarrow o(g) \mid |H|$

$o(g) \mid p$ & $o(g) = 1 \Rightarrow o(g) = p$

Daí $\langle g \rangle = \{ e, g, \dots, g^{p-1} \}$

$|\langle g \rangle| = p = |H|$

Daí $H = \langle g \rangle \cong C_p$ $\blacksquare$

$|G_{p_2}| = 3$ é primo $\Rightarrow G_{p_2} \cong C_3$

$|G_{p_3}| = 5$, é primo $\Rightarrow G_{p_3} \cong C_5$

$G_{p_1} <$ C_4 / $C_2 \times 2$

$G = C_4 \times C_3 \times C_5$

$G = C_2 \times C_2 \times C_3 \times C_5$

$G_{p_2} - C_3$

$G_{p_3} - C_5$

$G_{p_1} <$ $C_4 \to 2^{2}$ / $C_2 \times C_2$

$2^1 \times 2^1 = 2^{(1+1)}$

Seja $|G| = 16$ & G abeliano como é G? 9

$|G| = 16 = 2^4$ $p_1 = 2$ & $n_1 = 4$

<u>possibilidades</u>

- $C_{16} \longrightarrow 2^4$
- $C_4 \times C_4$ $2^2 \times 2^2 = 2^{2+2}$
- $C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$ $2^{1+1+1+1}$
- $C_8 \times C_2 \longrightarrow 2^{3+1}$

$C_4 \times C_2 \times C_2$ 2^{2+1+1}

$$\begin{aligned} 4 &= 4+0 \\ &= 2+2 \\ &= 1+1+1+1 \\ &= 3+1 \\ &= 2+1+1 \end{aligned}$$

<u>Teorema</u> Seja G um grupo abeliano de ordem p^n. Então $G \cong C_{p^{k_1}} \times \dots C_{p^{k_m}}$ com $k_1 + \dots + k_m = n$