Álg. 2 25/8 1

Grupos a partir dos que já existem.

$(G_1, *_1)$ & $(G_2, *_2)$ grupos

o produto direto de $G_1 \times G_2$.

Os elementos de $G_1 \times G_2$ são do tipo (g_1, g_2) com $g_i \in G_i$, $i = 1, 2$

&

$(g_1, g_2) * (g_3, g_4) := (g_1 *_1 g_3, g_2 *_2 g_4)$

Exemplo:

(1) $G_1 = (\mathbb{Z}, +)$ & $G_2 = (\mathbb{R}^*, \circ)$

$G = G_1 \times G_2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^*$

com a operação

$g_1 = (n, r)$ & $g_2 = (m, s)$

$g_1 * g_2 = (n+m, r \circ s)$

(2) $G_1 = C_n$ & $G_2 = C_m$ $G = G_1 \times G_2$

$n = 2$ & $m = 3$ $G = C_2 \times C_3$

$n = 2$ & $m = 2$ $G = C_2 \times C_2$ é conhecido como o <u>grupo de Klein</u>.

$G = C_2 \times C_3$ é algo novo?

$G_1 = C_2 = \{e_1, g_1\}$

$G_2 = C_3 = \{e_2, g_2, g_2^2\}$

Lembre que os elementos de C_n são $\{e, g, \dots, g^{n-1}\}$ & a operação em C_n é $g^i \cdot g^j = g^{(i+j)}$ onde $(i+j)$ é o resto da divisão de $i+j$ por n

Vimos vários exemplos e provamos que $(\mathbb{Z}_n, +) \cong C_n$ via o isomorfismo.

$\psi : \mathbb{Z}_n \to C_n$

$\bar{x} \mapsto g^x$ #

Os elementos de $C_2 \times C_3$ são:

$\{(e_1, e_2), (e_1, g_2), (e_1, g_2^2), (g_1, e_2), (g_1, g_2), (g_1, g_2^2)\}$

$g := (g_1, g_2)$

& olhe para as potências de g:

$g^0 = (e_1, e_2) = e \to$ elemento neutro de G.

$g^1 = g = (g_1, g_2)$

$g^2 = g \cdot g = (g_1^2, g_2^2) = (e_1, g_2^2)$

$g^3 = g^2 \cdot g = (g_1, e_2)$

$g^4 = g^3 \cdot g = (e_1, g_2)$

$g^5 = g^4 \cdot g = (g_1, g_2^2)$.

$g^6 = g^5 \cdot g = (e_1, e_2) = e$

$o(g) = 6$.

$\langle g \rangle = \{ e, g, g^2, g^3, g^4, g^5 \} = G$
logo
$G = \langle g \rangle = C_6$

Conclusão:
$C_2 \times C_3 \cong C_6$

$C_2 \times C_3 \longmapsto C_6 = \langle x \rangle$
$(g_1^i, g_2^j) = g \longmapsto x^j$

Veja: $o((e_1, g_2)) = 3$
$o((e_1, g_2^2)) = 3$
$o((g_1, e_2)) = 2$
$\boxed{o((g_1, g_2^2)) = 6}$ São os geradores de $C_2 \times C_3$.
$\boxed{o((g_1, g_2)) = 6}$
$o((e_1, e_2)) = 1$

$C_2 \times C_2$ o grupo de Klein
G um grupo t.q. $g^2 = e \ \forall g \in G$
Mostre que G é abeliano. #
$p(x) = x^2 - 1$
$A^2 = I$ em $M_2(\mathbb{R})$

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dado qualquer B com det(B) & $A_0 \in X$

$(B^{-1} A_0 B)^2 = I$

$B^{-1} A_0 B \circ B^{-1} A_0 B$

Ser abeliano é

$xy = yx \quad \forall\, x, y \in G.$

Tese: $xy = yx \quad \forall\, x, y \in G$

Hip: $x^2 = e \quad \forall\, x \in G$

$x^2 = e$

$y^2 = e \qquad e = (xy)^2 = xyxy = e$

multiplique por x, obtém:

$x \cdot xyxy = x$

$yxy = x$

multipli à esq. por y.

$\underbrace{y \cdot y}_{e} \cdot xy = yx$

$\boxed{xy = yx}$

① Grupo de Klein

$G = C_2 \times C_2$

$C_2 = \{e_1, g_1\}$ os elementos de G são:

$\{(e_1, e_2), (e_1, g_1), (g_1, e_1), (g_1, g_2)\}$

$(e_1, e_1)^2 = e \qquad (g_1, e_1)^2 = e$

$(e_1, g_1)^2 = e \qquad (g_2, g_1)^2 = e$

Logo, $x^2 = e \quad \forall x \in G.$

Porém $|G| = 4$
Veja que $C_2 \times C_2$ não é isomorfo a C_4.

Exercício:
Seja $\psi : G_1 \to G_2$ um isomorfismo de grupos. $n \in \mathbb{N}$.
Então:

$$\left| \{ g_1 \in G_1 \mid o(g_1) = n \} \right| = \left| \{ g_2 \in G_2 \mid o(g_2) = n \} \right|$$

Prove que dado $g_1 \in G_1$

$$o(\psi(g_1)) = o(g_1)$$

Provado o exercício porque $C_2 \times C_2 \not\cong C_4$?

Porque C_4 tem um elemento de ordem 4 porém $C_2 \times C_2$ não!.

$C_6 \cong C_2 \times C_3$ $\quad$ $C_4 \not\cong C_2 \times C_2$
$C_{12} \cong C_4 \times C_3$? conjectura?
$mdc(n, m) = 1$
$C_{n.m} \cong C_n \times C_m$? Sim!
$C_n = \{ e_1, g_1 \dots g_1^{n-1} \}$
$C_m = \{ e_2, g_2, \dots g_2^{m-1} \}$

25/08 /6

$g := (g_1, g_2)$

Mostre que nm é menor potência t.q. $g^n = e = (e_1, e_2)$, ou seja,

$o(g) = nm$

logo, $G = \langle g \rangle$

$g^j = (g_1^j, g_2^j)$

$g^j = e \iff$

$(g_2^j, g_2^j) = (e_1, e_2)$

$\iff$

$g_1^j = e_1$ & $g_2^j = e_2$

Conclui que $n \cdot m$ divide j

Porém em geral

$C_n \times C_m \not\cong C_{nm}$.

① Os grupos abelianos finitos

Seja G um grupo abeliano & p um primo que divide $|G|$

$G_p := \{ g \in G \mid o(g)$ é uma potência de $p \}$

__Teorema__: Seja G um grupo abeliano finito & $\{p_1 \dots p_n\}$ o conjunto de divisores primos, dois a dois, distintos de G.

Então: $\underset{C_2}{G} = \underset{C_3}{G_{p_1}} \times \dots \times G_{p_n}$.

$C_6 \cong C_2 \times C_3$

$p_1 = 2 \quad p_2 = 3$