18/08/08

Álgebra Linear

1. Espaço Vetorial $\leftrightarrow$ Grupo — caso particular de grupo abeliano.
2. Sub. Espaço $\leftrightarrow$ Sub. Grupo
3. Transformação Linear $\leftrightarrow$ Homomorfismos de Grupos.
4. Geradores

$T: V \mapsto V$ Linear

$Ker(T) = \{v \in V \mid Tv = 0)$ $\quad T(v_1) \oplus T(v_2) = T(v_1 + v_2)$ é t.q. $Im(T)$ também é espaço vetorial

Homomorfismo

$\Phi : G_1 \to G_2$ uma função

→ Quero tornar $Im(\Phi)$ um subgrupo de G_2. Que devo impor a Φ?

Garantir equivalência e Φ bijetora

Se $|G_2| = |H|$ é bijetora

Ex. Seja G um grupo e H um subgrupo de G.

Então H é subgrupo de G

$\Longleftrightarrow$

1. $H \neq \emptyset$
2. $h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 h_2^{-1} \in H$.

Respondendo:

$Im(\Phi) = \{\Phi(g) \mid g \in G_1\}$

De ser subgrupo de G_2:

① é satisfeito pois $\Phi(e) \in Im(\Phi)$

② $\Phi(g_1), \Phi(g_2) \in Im(\Phi)$.

Quero que $\Phi(g_1) \cdot \Phi(g_2)^{-1} \in Im(\Phi)$, ou seja, devo achar $g_3 \in G_1$ t.q.

$\Phi(g_1) * \Phi(g_2)^{-1} = \Phi(g_3)$. $\quad g_3 = g_1 \circ g_2^{-1}$

Basta impor

$$\boxed{\Phi(g_1 \circ g_2) = \Phi(g_1) * \Phi(g_2)}$$

18/08/08

Definição: $\phi : (\overset{e_1}{\overset{\uparrow}{G_1}}, \circ) \longrightarrow (\overset{e_2}{\overset{\uparrow}{G_2}}, *)$ é um homomorfismo de Grupo se

$$\phi(g_1 \circ g_2) = \phi(g_1) * \phi(g_2)$$

Propriedade:

a) $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$

Note que:

$$\phi(e_1) = \phi(e_1 \circ e_1)$$
$$= \phi(e_1) * \phi(e_1)$$
$$= [\phi(e_1)]^2$$

Num grupo qualquer a equação $x^2 = x$ tem uma única solução, a saber ao elemento neutro.

Logo, $\phi(e_1) = e_2$ pois G_2 é grupo.

Usando isto $e_2 = \phi(g_2 \circ g_2^{-1})$

$$= \phi(g_2) * \phi(g_2^{-1})$$

Daí: $\phi(g_2^{-1}) = \phi(g_2)^{-1}$

Se ϕ é homomorfismo de grupos de $G_1 \longrightarrow G_2$ então $\mathrm{Im}(\phi)$ é subgrupo de G_2.

Definição: Seja $\phi : G_1 \longrightarrow G_2$ homomorfismo de grupos, o núcleo

$$\mathrm{Ker}(\phi) := \{g \in G \mid \phi(g) = e_2\}$$

Lema:

$\mathrm{Ker}(\phi)$ é subgrupo de G_1

Prova: 1. $\mathrm{Ker}(\phi) \neq \emptyset$

Pois $\phi(e_1) = e_2$

2. $\phi(g_1) \circ \phi(g_2)^{-1} \in \mathrm{Ker}(\phi)$?

$\phi(e_1) * \phi(e_2)^{-1} = \phi(e_3)$ $\qquad e_3 = e_1 \circ e_2^{-1}$

$\boxed{e_2^{-1} = e_2}$ neutro

18/08/08

Prova

1. $e_2 = \phi(e_1) \Rightarrow e_1 \in Ker(\phi) \Rightarrow$
$Ker(\phi) \neq 0$.

2. $g_1, g_2 \in Ker(\phi)$
$g_1 \circ g_2^{-1} \in Ker(\phi)$?

Sim, pois
$$\phi(g_1 \circ g_2^{-1}) = \phi(g_1) * \phi(g_2^{-1})$$
$$= \phi(g_1) * \phi(g_2)^{-1}$$
$$= e_2 * e_2^{-1} = e_2.$$

Lema

$\phi : G_1 \longrightarrow G_2$ é injetora $\Leftrightarrow$
$Ker(\phi) = \{e_1\}$

Prova:

$(\Rightarrow)$ hip. ϕ é INJ.
Tese: $Ker(\phi) = \{e_1\}$

Tome $x \in Ker(\phi) \Rightarrow$
$$\phi(x) = e_2 = \phi(e_1)$$
daí
$x = e_1$ pois ϕ é 1-1.

$(\Leftarrow)$ $Ker(\phi) = \{e_1\}$
Tese: ϕ é INJ = 1-1.

Suponha $\phi(x) = \phi(y)$
$\Rightarrow \phi(x) * \phi(y)^{-1} = e_2$
$\phi(x \cdot y^{-1})$, ou seja,
$\phi(x \cdot y^{-1}) = e_2$
logo, $x \cdot y^{-1} \in Ker\,\phi = \{e_1\}$
daí:
$x \cdot y^{-1} = e_1$
daí:
$x = y$.

17/08/08

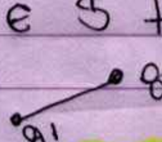
Um homomorfismo que é injetora é dito monomorfismo.
Um homomorfismo que é sobrejetora é dito epimorfismo.
Um homomofismo que é bijetora é dito isomorfismo.

Se $\phi : G_1 \to G_2$ é um isomorfismo de grupos, então G_1 e G_2 são ditos Isomorfos.

Grafos de Grupos.

Seja G um grupo.
$S \subset G$ t.q.
$x \in S \Rightarrow x^{-1} \in S$
Um tal S é dito um conjunto Simetrico.
Dizemos que S gera G ou é um conjunto de geradores de G se
$\forall g \in G$ existem
$x_1, \ldots, x_k \in S$
t.q.
$$g = x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n$$

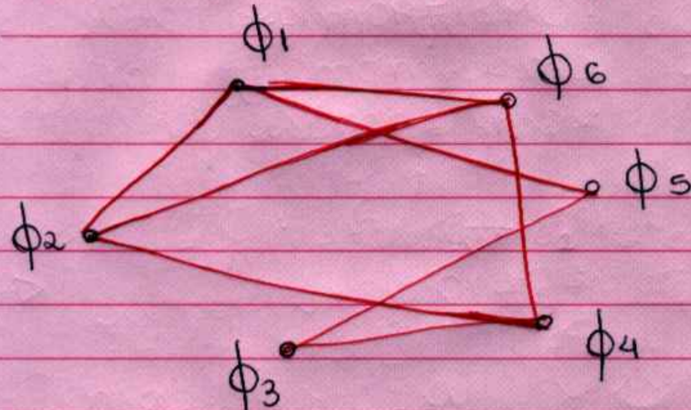
O grafo de Cayley de G é construído como segue:
Os vértices de $\mathcal{G}(G)$ - grafo de Cayley. São os elementos de G $\therefore$.
Existe uma ~~arco~~ aresta ligando g_1 e g_2 $\Leftrightarrow$
$\exists\, x \in S$ t.q. $g_2 = g_1 \circ x$, ou seja, $g_1^{-1} g_2 \in S$.



18/08/08

$S_3 = \{$  $\}$ $\qquad \{\phi_2 \text{ e } \phi_5\}$ gerador.

$S = \{\phi_2, \phi_5, \phi_6\}$ é conjunto simétrico.



$\phi_6 = \phi_1 \circ \phi_6$

$\phi_2 = \phi_1 \circ \phi_2$ $\qquad 5$

$\phi_5 = \phi_1 \circ \phi_5$

Fazer para $\langle g \rangle$, $O(g) = 5$.