Álgebra 2 15/8 | 008

Monitoria
ter 12 - 16h
quart 12 - 14h
sext 12 - 13h $\longrightarrow$ X monitoria da pura

$\boxed{\begin{array}{l}\text{quarta : 12 – 14h} \\ \text{quinta : 10 – 10:40}\end{array}}$

Visto
Teo (LAGRANGE)
Seja G um grupo finito & $H < G$
um subgrupo, então
$|H|$ é um divisor de $|G|$ $\blacksquare$

Define
$$[G:H] = \frac{|G|}{|H|}$$
o INDICE DE H em G

Da prova $G = [x_1] \cup \ldots \cup [x_k]$
$w_j = [x_j] = x_j H$
ou seja $\boxed{G = x_1 H \cup \ldots \cup x_k H}$
uma união disjunta
& $\forall i, j$ $|x_j H| = |x_i H| = |H|$

onde $x_j H = \{x_j \cdot h \mid h \in H\}$

Logo $k = [G : H]$ os $x_j H$ são chamados as classes laterais à esquerda de H.

Conjuntos do tipo $H x_j = \{h x_j \mid h \in H\}$ são chamados classes laterais à direita de H

Como ~~sao~~ surge $x_j H$?

Surge da relação de EQ.:

$$x \sim y \iff x^{-1} y \in H$$

Vimos que $x \sim y \iff y \in xH$

Como surge $H x_j$?

$$x \sim y \iff y x^{-1} \in H$$

AF.: $x \sim y \iff y \in Hx$

Af.: $|x_jH| = |Hx_j| = |H|$

Prova

$f: H \longrightarrow x_jH$ vimos ser bijeção

$h \mapsto x_j h$

Idem

$g: H \longmapsto Hx_j$ é bijeção

$h \longmapsto hx_j$ $\blacksquare$

Logo $[G:H]$ só depende de H

$[G:H]$ é o número de classes laterais (esquerda ou direita) de H em G & uma destas classes é o próprio H.

$e \in G = x_1H \cup \dots \cup x_kH$

Logo, $\exists\, i_0$ t.q. $e \in x_{i_0}H$

$x_{i_0}H = [x_{i_0}]$

$e \in x_{i_0}H = [x_{i_0}] \Rightarrow e \sim x_{i_0} \Rightarrow x_{i_0} \sim e$

$\Leftrightarrow x_{i_0} \in [e] = e.H = H$

mas $x_{i_0} \in [x_{i_0}] \cap [e] \neq \emptyset$

Sendo $\sim$ uma relação de equivalência

$\Rightarrow x_{i_0}H = [x_{i_0}] = [e] = H$

Numa relação de eq. s/X $a \sim b \Leftrightarrow [a] = [b]$

Logo, pode-se supor sempre que

$\underline{x_1 = e}$.

1) Dica

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A}$$

$$g = I + A$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^3 = A^2 \cdot A = 0$$

$$0 = A^k, \quad k \geq 2$$

$$g^2 = (I+A)^2 = I + 2A + A^2$$
$$= I + 2A$$

$$g^n = (I+A)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k} \cdot A^k$$
$$= I^n A^0 + \binom{n}{1} I^{n-1} A^1$$
$$= I + \binom{n}{1} A$$
$$= I + nA$$

$$g^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad g^{-1} = I - A$$

G grupo finito e $g \in G$

$\langle g \rangle = \{ g^n \mid n \in \mathbb{Z} \}$

Vimos ser subgrupo

$$O(g) : |\langle g \rangle|$$

Exercício: $g^{O(g)} = e$

portanto $g^{|G|} = e$ ∎

Por Lagrange:

$O(g)$ divide $|G|$

Quem são os grupos de ordem 6?

$6 = 2 \cdot 3$

$g \in G \Rightarrow O(g) \mid |G|$ (ordem é o nº distinto de potências de g)

$\Downarrow$

$O(g) \in \{1, 2, 3, 6\}$

Supondo que existe $g_0 \in G$ com $O(g_0) = 6$.

Logo o número de potências distintas de g_0 é 6.

$\langle g_0 \rangle = \{ g_0^0 = e, g_0, g^2, g^3, g^4, g^5 \}$

Daí

$G = \langle g_0 \rangle$ é abeliano e cíclico

$g^2 = g^4$

mult. por g^{-2}

$g^2 = e \Rightarrow g^{-2} = e$

Logo

$\{ g^n / n \in \mathbb{Z} \} = \{ e, g \} = \langle g \rangle$

$O(g) = |\langle g \rangle| = 2$ e não 6. #

$\underline{e}$ é o único elemento de ordem 1

$\boxed{13}$

Suponha que todo $g \neq e$ tem $O(g) = 2$.

Af. G é abeliano, neste caso acima.

$\# \ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \ \#$

$G = \{$ simetria do $\Delta \}$ tem ordem 6 e não é abeliano

$G = \{ \sigma : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\} \mid \sigma$ bijeção $\}$

$(\mathbb{Z}_6, +)$ é cíclico de ordem 6

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$						
$\bar{1}$						
$\bar{2}$						
$\bar{3}$						
$\bar{4}$						
$\bar{5}$						

Quais os elementos de ordem 6 em $\mathbb{Z}_6$?

$\bar{1}^2 = \bar{1} * \bar{1} = \bar{1} + \bar{1} = \bar{2}$

$\bar{1}^3 = \bar{1} * \bar{1} * \bar{1} = \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} = \bar{3}$

$\bar{1}^4 = \bar{4}$

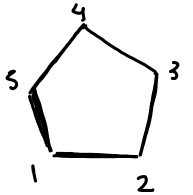
$\bar{1}^5 = \bar{5}$ $\qquad \bar{x} * \bar{0} = \bar{x} + \bar{0} = \overline{x+0} = \bar{x}$

$\bar{1}^6 = \bar{0}$ $\qquad$ logo $\bar{0} = e$

$\langle \bar{1} \rangle = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5} \}$ $\qquad |\langle \bar{1} \rangle| = 6$

logo, $O(\bar{1}) = 6$

Estes são os únicos grupos de ordem 6?

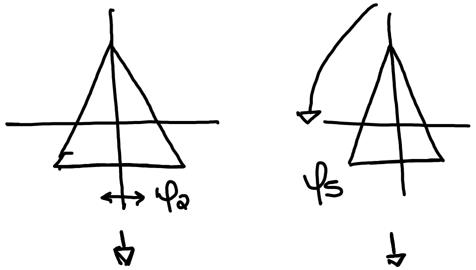


pentágono regular.

$\sigma(1) = 5$ $\qquad$ $2 \cdot 5 = 10$

$\sigma(5) = 2$ ×

Reflexões e Rotações.



$$\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos\left(2\frac{\pi}{3}\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$$

$$\varphi_5 = \begin{pmatrix} -1/2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \qquad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Representação Matricial de um Grupo:

é uma função

$$\psi : G \longmapsto M_n(\mathbb{C}) \text{ t.q.}$$

$$\psi(g_1 * g_2) = \psi(g_1)\,\psi(g_2)$$

$G = \{ \triangle \} = S_3$

$S_3 \longmapsto M_2(\mathbb{R})$

$$\varphi_2 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \varphi_5 = \longmapsto \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

→ Grupos de Raízes de Unidade

Um G ≤
$(\mathbb{C}^*, \cdot)$
$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ é um grupo.
Um $g \in G$ é uma raiz da unidade se
$O(g) < \infty$, ou seja, $\langle g \rangle$ é um grupo finito.
Logo $g^{O(g)} = e = 1$.
Logo, $z = g \in G$ é raiz da unidade se $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.q.

$$g^n = 1.$$

Logo, g é raiz do polinomio
$p_n(z) = z^n - 1$.
Este polinômio tem n raízes distintas.
$z^n - 1 = \pi(z - z_j) = p_n(z)$
se $\exists\, i_0 \neq j_0$ com $z_{i_0} = z_{j_0}$
$\Rightarrow p_n(z) = (z - z_{i_0})^2 \cdot h(z)$

$p_n'(z) = n z^{n-1} = 2(z - z_{i_0}) \cdot h(z) + (z - z_{i_0})^2 \cdot h'(z)$
agora substitui z_{i_0} nesta eq.
$n \cdot z_{i_0}^{n-1} = 0 \Rightarrow z_{i_0} = 0$ então $0 = z_{i_0}^n = 1$ absurdo
pois $z_{i_0}^n - 1 = p_n(z_{i_0}) = 0$

$$z_{i_0}^n = 1.$$

$W_n = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \}$

$(W_n, \circ)$ é um grupo

e $|W_n| = n$