Álg 2 14/8 34

Álg. ~~div~~. Linear ⟷ Álgebra

- Espaço Vetorial ⟷ Grupos
- Subespaço Vet. ⟷ Subgrupo
- Geradores
- Base
- Transf. Linear

<u>Definição</u>

Seja $(G, *)$ um grupo

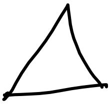
Um subgrupo de G é um subconjunto H t.q.

1. $H \neq \emptyset$
2. $(H, *)$ é fechado
   $h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 * h_2 \in H$
3. $h \in H \Rightarrow \hat{h} \in H$

obs.: a associativa é herdada

$(H, *)$, com $*$ herdada de G, é um grupo

- <u>Exercício</u>: Se H é subgrupo de $G \Rightarrow e \in H$

 $G = S_3$ $\{\varphi_1, \dots, \varphi_6\}$

Achar $H \subsetneq G$ & que é subgrupo

1. $H = \{\varphi_1\}$

2. $H = \{\varphi_2, \varphi_5, \varphi_6\}$

3. $H = \{\varphi_1, \varphi_2\}$

4. $H = \{\varphi_1, \varphi_3\}$

5. $H = \{\varphi_1, \varphi_4\}$

$H_1 = \{\varphi_1, \varphi_5, \varphi_6\}$ $\boxed{g_0 = \varphi_3}$

$H_1 g_0 = \{g * g_0 \mid g \in H_1\}$

$= \{\varphi_1\varphi_3, \varphi_5\varphi_3, \varphi_6\varphi_3\}$

$= \{\varphi_3, \varphi_4, \varphi_2\}$

$g_0 H_1 = \{\varphi_3, \varphi_2, \varphi_4\}$

$\Downarrow$

$|H_1| = |g_0 H_1| = |H_1 g_0|$

$\boxed{g_0 H_1 = H_1 g_0}$

& $G = H_1 \cup g_0 H_1$

$H_2 = \{\varphi_2, \varphi_2\}$

$g_0 = \varphi_3$

$g_0 H_2 = \{\varphi_3\varphi_1, \varphi_3\varphi_2\}$

$= \{\varphi_3, \varphi_5\}$

$H_2 g_0 = \{\varphi_1\varphi_3, \varphi_2\varphi_3\}$

$= \{\varphi_3, \varphi_6\}$

$\Downarrow$

$|H_2| = |g_0 H_2| = |H_2 g_0|$

$g_0 H_2 \neq H_2 g_0$

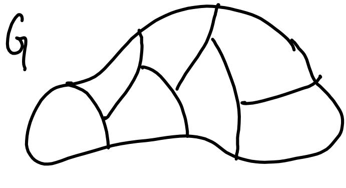
$H_2 \cup H_2 g_0 \neq G$

$H_2 \cap H g_0 = \emptyset$

<u>Teorema</u>: (Lagrange)

Dado um grupo G com $|G|$ um número natural & H um subgrupo de G $(H < G)$ Então $|H|$ divide $|G|$

A ordem do grupo G é o número de elementos de G. Nosso caso $|G| = G$ $\quad |H| \,\big|\, |G|$ $\forall$ H subconjunto de G



Faremos uma partição de G, ou seja, vamos escrever

1) $G = W_1 \cup W_2 \ldots \cup W_k$ com $W_i \cap W_j = \emptyset$ se $i \neq j$

$$\left.\begin{array}{l} |G| = \sum |W_j| \\ 2)\ |W_j| = |H| \ \forall j \end{array}\right\} \Rightarrow |G| = k|H|$$

$x, y \in gH \quad x = gh_2$ & ~~g~~ $y = gh_2$

Em vez de $\hat{g}$ escreva g^{-1}

$$x^{-1}y = (gh_1)^{-1} \cdot gh_2 = h^{-1}\overbrace{g^{-1}g}^{e}h_2 = h_1^{-1}h_2 \in H$$

Defina a seguinte relação de equivalência:

Dizemos que $x \sim y \iff x^{-1}y \in H$

- $x \sim x$, pois $x^{-1}x = e \in H$
- $x \sim y \overset{?}{\Rightarrow} y \sim x$

BZ

$x \sim y \overset{?}{\Longrightarrow} y \sim x$

Hip $\qquad$ Tese

$\Downarrow$

$x^{-1}y \in H$ daí

$(y^{-1}x)^{-1} = x^{-1}y \in H$

Logo $y^{-1}x \in H$

$x \sim y$ & $y \sim z \Longrightarrow x \sim z$

Hip $\qquad$ TESE

$\Downarrow$

$$\boxed{x^{-1}y \in H \ni y^{-1}z}$$

$\Downarrow$

$$H \ni (x^{-1}\underbrace{y)\cdot(y^{-1}}_{e}z) = x^{-1}z$$

$x^{-1} \in H \Longrightarrow x \sim z$

$x \sim y \Longrightarrow x^{-1}y \in H \Longrightarrow x^{-1}y = h \in H$ $\quad y = xh$

$y \in xH = \{xh \mid h \in H\}$. Logo $x \sim y \Longrightarrow y \in xH$

Se $z \in xH \Longrightarrow z = xh$, $h \in H$. Daí

$x^{-1}z = x^{-1}xh = eh = h \in H$. Daí $x \sim z$. Daí

$x \sim y \Longleftrightarrow y \in xH$

Logo $[x] = \{y \in G \mid x \sim y\} = xH$ é a classe de equivalência de x. Ver Alg. I $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, x_1, \ldots, x_k$ t.q. $G = [x_1] \cup \ldots [x_k]$
$[x_i] \cap [x_j] = \emptyset$ se $i \neq j$

$W_j = [x_j] = x_j H$

Defina

$$f : H \longmapsto W_j = x_j H$$
$$h \longmapsto x_j h$$

$f(h_1) = f(h_2) \Rightarrow x_j h_1 = x_j h_2$ multiplique por x_j^{-1}

$h_1 = h_2$ ✓

conceito de subgrupo:

garantir equivalência e f ser bijetora

Logo f é injetora. Tome $y \in W_j \Rightarrow$
$\Rightarrow y = x_j h$, $\exists\, h \in H \to y = x_j h = f(h)$
Logo f é bijeção $\Rightarrow |W_j| = |H|$

Seja G um grupo & $g \in G$ $\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

$$g^n = \begin{cases} g, & n = 1 \\ e, & n = 0 \\ g^{n-1} * g, & n \geq 2 \\ (g^{-n})^{-1} & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

$g^3 = g^{3-1} \cdot g = g^2 g$

H é um subgrupo de G

$H = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Exercício: $g^n * g^m = g^{n+m}$

$(g^n)^{-1} = g^{-n}$

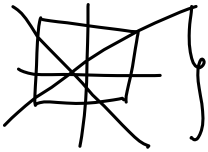
$\langle g \rangle := \{ g^n \mid n \in \mathbb{Z} \}$

o subgrupo ~~cícl~~ cíclico gerado por $\{g\}$ & define A ~~ord~~ ordem de g por

$o(g) = |\langle g \rangle|$

<u>Corolário</u> $o(g) \mid |G|$

Exercício : $\boxed{g^{o(g)} = e}$

$G = \{$  $\}$ $|G| = 8$

subgrupos $H < G$

$|H| \in \{1, 2, 4, 8\}$

φ_7

1. $H = \{e\}$
2. $H = G$
3. $H = \{\varphi_1, \varphi_2\}$
4. $H = \{\varphi_1, \varphi_3\}$
5. $H = \{\varphi_1, \varphi_4\}$
6. $H = \{\varphi_1, \varphi_7\}$
7. $H = \{\varphi_1, \varphi_5\}$

8. $H = \{\varphi_1, \varphi_6, \varphi_6^2, \varphi_6^3\}$

$= \langle \varphi_6 \rangle = \langle \varphi_6^3 \rangle = \langle \varphi_8 \rangle$

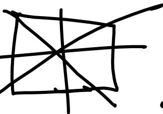
9. $H = \{\varphi_1, \varphi_7, \varphi_2, \varphi_7 \cdot \varphi_2 = \varphi_3$

<u>Exercício</u>

$\varphi_7 * \varphi_j = \varphi_j * \varphi_7 \quad \forall j$

10. $H = \{\varphi_1, \varphi_7, \varphi_5, \varphi_7 \cdot \varphi_5 = \varphi_4\}$

Seja G um grupo & $g, h \in G$
Dizemos que g comuta com h se
$g * h = h * g$
G é dito <u>comutativo</u> ou <u>abeliano</u>
se $\forall g, h \in G \quad g * h = h * g$

$\varphi_2, \varphi_3 \in G = \{$  $\} = D_8$ o <u>grupo dihedral de ordem 8</u>

$\varphi_2 * \varphi_5 = \varphi_8$ ñ comuta
$\varphi_5 * \varphi_2 = \varphi_6$

Vamos formar um subgrupo que contém $\{\varphi_2, \varphi_5\}$. Tal subgrupo deve conter
$H = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_5, \varphi_8, \varphi_6, \dots\}$
Por Lagrange $H = G$

Seja V um conjunto com
$$+ : V \times V \longmapsto V$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$
V é $\mathbb{R}$ espaço vetorial se
(1) $(V, +)$ é grupo abeliano
(2) {o restante das 8 prop. de esp. vet}

Quando G é abeliano a operação $*$ em geral é trocado por $+$ [41

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{c} a,b,c \in \mathbb{R} \\ \underbrace{ab}_{\text{det.}} \neq 0 \end{array} \right\} = T_2(\mathbb{R})$$

$(G, *)$ é um grupo

$\hookrightarrow$ mult. de matrizes

$$\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & z \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & az + yc \\ 0 & by \end{pmatrix}$$

$$(ax) \cdot (by) = (ab)(xy) \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{c}{ab} \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$$

$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\}$ é um subgrupo de G $\quad H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\}$ é um subgrupo de G. $A, B \in G$ $[A, B] := A^{-1} B^{-1} A B$ é chamado o comutador de A & B

Mostre que $[A, B] \in H \quad \forall A, B \in G$
(diagonal dá 1)

$g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i) Calcule $g^n, n \in \mathbb{Z}$

ii) $\langle g \rangle = ?$

iii) $o(g) = ?$

iv) $f : \mathbb{Z} \to \langle g \rangle$ é uma bijeção

$n \mapsto g^n$ t.q $f(n + m) = f(n) * f(m)$