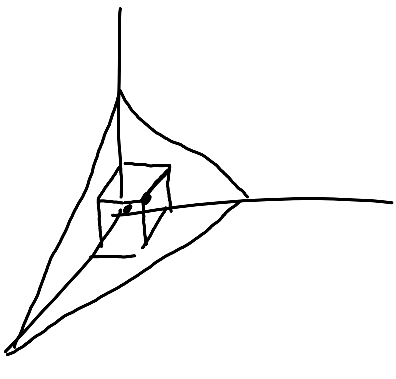
Cálc. III 2012

Encontrar o volume máximo:

uma caixa retangular está apoiada no plano xy com um vértice na origem. O vértice oposto está no plano

$$6x + 4y + 3z = 24$$

Encontre o volume máx. de tal caixa



$$V = xyz \Rightarrow V(x,y) = \frac{xy}{3}(24 - 6x - 4y) \geq 0$$

$$V(x,y) = 8xy - 2x^2y - \frac{4}{3}xy^2$$

1- $V_x = V_y = 0$

(1) $V_x = 8y - 4xy - \frac{4}{3}y^2 = 0$

(2) $V_y = 8x - 2x^2 - \frac{8}{3}xy = 0$

(1) $y\left(2 - x - \frac{1}{3}y\right) = 0$

$\cancel{y = 0}$ ou $2 - x = \frac{1}{3}y$

(2) $8x - 2x^2 - 8x(2 - x) = 0$

$8x - 2x^2 - 16x + 8x^2 = 0$

$-8x + 6x^2 = 0$

$x(-8 + 6x) = 0$

$\cancel{x = 0}$, $x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$\frac{1}{3} y = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ $\boxed{y=2}$

Ponto crítico é $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$

$2 - {}^{1}{}_{xx} = -4y$

$V_{yy} = -\frac{8}{3} x$

$\cancel{\ }\ V_{xy} = 8 - 4x - \frac{8}{3}y$

$d(x,y) = (-4y)\left(-\frac{8}{3}x,\ -\left[8 - 4x - \frac{8}{3}y\right]^2\right.$

$d\left(\frac{4}{3}, 2\right) = 8 \times \frac{8}{3} \frac{4}{3} - \left[8 - \frac{16}{3} - \frac{16}{3}\right]^2$

$= \frac{64 \times 4}{9} - \frac{64}{9} = 3 \times \frac{64}{9} = \frac{64}{3} > 0$

1

$3 - V_{xx}\left(\frac{4}{3}, 2\right) = -8 < 0$

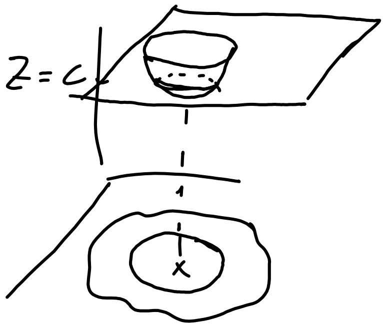
valor máximo $V\left(\frac{4}{3}, 2\right) = \frac{8}{9}\left(24 - \frac{64}{3} - 8\right)$

$= \frac{64}{9}$

—— // ——

Considere a superfície

$z = f(x,y)$



Curvas de nível

$\forall c \in \mathbb{R}, N_c = \{x,y : f(x,y) = c\}$

exemplo: $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

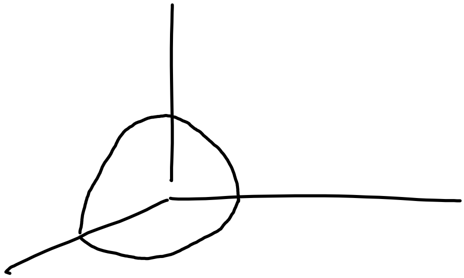
Cálc III 2012 L32

$N_1 = \{ (x,y) : z = 1 \}$

$$\sqrt{4 - x^2 - y^2} = 1$$

$$3 - x^2 - y^2 - 2$$

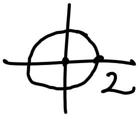
$$3 = x^2 + y^2$$



$$4 - x^2 - y^2 = c^2 \rightarrow N_c$$

$$0 \leq 4 - c^2 = x^2 + y^2$$

$$4 \geq c^2 \Rightarrow 2 \geq c \geq 0$$



Definição de gradiente

$z = f(x,y)$, f_x, f_y existam, o gradiente de f, denotado por "∇f" é o vetor

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\vec{i} + f_y(x,y)\vec{j}$$
$$= \langle f_x(x,y)\ f_y(x,y) \rangle$$

exemplo:

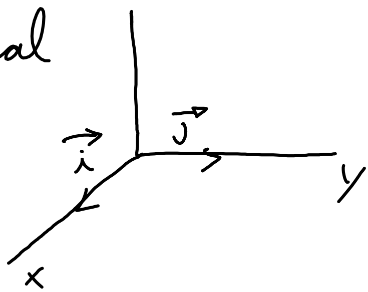
$$f(x,y) = y \ln x + y^2$$

$$\nabla f(1,2)$$

$$f_x = \frac{y}{x} \qquad f_y = \ln x + 2y$$

$$\nabla f(1,2) = \langle 2, 4 \rangle$$

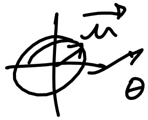
Derivada Direcional



$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$

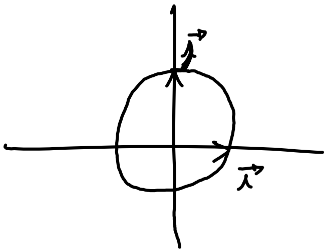
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

$|\vec{u}| = 1$



$$D_{\vec{u}} f(a,b) = \nabla f(a,b)\,\vec{u}$$
$$= f_x \cos\theta + f_y \operatorname{sen}\theta$$

$$\vec{u} = \vec{i} = (\cos 0, \operatorname{sen} 0) = (1,0)$$



$$D_{\vec{u}} f(a,b) = f_x 1 + f_y 0 = f_x$$

$\vec{u} = \vec{j} = (0,1)$, $D_{\vec{u}} f = f_y$

Exemplo: calcule a derivada direcional de $f(x,y) = 3x^2 - 2y^2$ em $(-3/4, 0)$ na direção de $P = (-3/4, 0)$ para $Q = (0,1)$

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{9/16 + 1} = \sqrt{\tfrac{25}{16}} = 5/4$$

cálc III 20/2 35

$$D_{\vec{u}} f = \nabla f\left(-3/4, 0\right) \cdot \left(\cancel{\tfrac{15}{16}}\right) \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$\left(\overrightarrow{PQ} = \left(3/4, 1\right)\right.$$

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{4}{5}\left(\frac{3}{4} \quad 1\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$\nabla f = \langle 6x, -4y \rangle$$

$$\nabla f\left(-\frac{3}{4}, 0\right) = \left\langle -\frac{9}{2}, 0 \right\rangle$$

$$D_{\vec{u}} f = \left\langle -\frac{9}{2}, 0 \right\rangle \cdot \left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle =$$

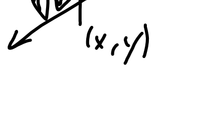
$$= -\frac{27}{10}$$

Propriedades do Gradiente

1. A direção de crescimento máximo de f é dada por $\nabla f(x,y)$, o valor máximo de $D_{\vec{u}} f(x,y)$ é $\|\nabla f(x,y)\|$

2. A direção de maior ~~crescime~~ decrescimento (crescimento mínimo) de f é dada por $-\nabla f(x,y)$. O valor mínimo de $D_{\vec{u}} f(x,y)$ é $\|\nabla f(x,y)\|$

$\nabla f(x,y) \neq (0,0)$



$$\phi = \measuredangle(\vec{u}, \nabla f(x,y))$$

$$D_{\vec{u}} f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \vec{u}$$

$$= \|\nabla f(x,y)\| \cdot \|\vec{u}\| \cos\phi$$

$$= \|\nabla f(x,y)\| \cos\phi$$

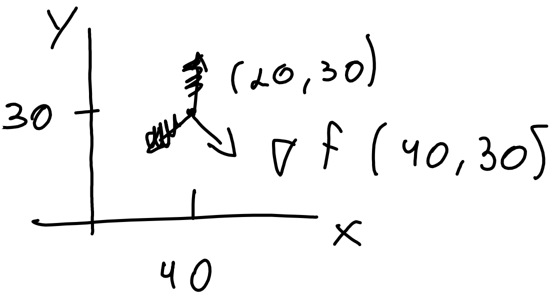
Se $\cos\phi = 1 \Rightarrow \phi = 0 \Rightarrow \vec{u} \parallel \nabla f(x,y)$

Se $\cos\phi = 1 \Rightarrow \phi = \pi \Rightarrow \vec{u}$ tem direç. $-\nabla f$

Exemplo: Suponha que a temperatura w no ponto (x, y). Seja

$$w = f(x,y) = 10 + 2x^2 - y^2$$

Em que direção $\vec{u}$ $(\|\vec{u}\| = 1)$ uma abelha no ponto $(40, 30)$ deve começar a voar para se aquecer o mais depressa possível? Det $D_{\vec{u}} F(\cancel{30,40})$ $40, 30$



$$\vec{u} \rightsquigarrow \nabla f(40\ 30)$$

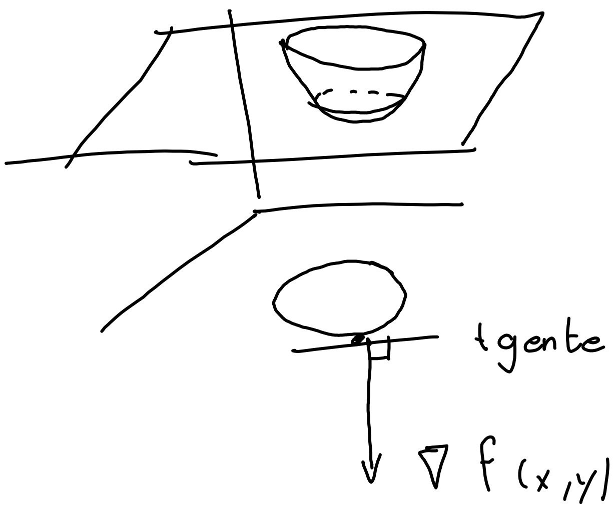
$$\nabla f = \langle 4x, -2y \rangle$$

$$\nabla f_{(40,30)} = \langle 160, -60 \rangle$$

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(40,30)}{\|\nabla f(40,30)\|} = \frac{1}{a}(160,-60)$$

$$\|\nabla f(40,30)\| = \sqrt{160^2 + 60^2} = a$$

$$D_{\vec{u}} f(40,30) = a$$



Teorema: O gradiente é normal às curvas de nível.

Prova Seja a superfície $z = f(x,y)$ e considere

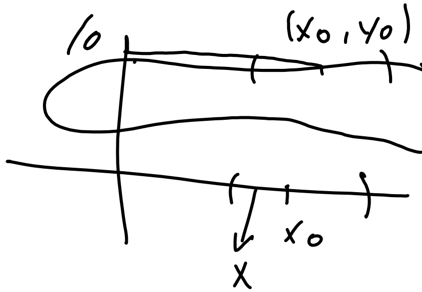
$V_c \neq \emptyset$

$\{(x,y) ; f(x,y) = c\}$

Suponha $(x_0, y_0) \in N_c$, $\nabla f(x_0,y_0) \neq \vec{0}$

$\rightarrow$ $\nabla f(x_0, y_0) \perp N_c$ no ponto (x_0, y_0)

Prova: Suponha que para $(x_0, y_0) \in N_c$, temos que localmente (perto de (x_0, y_0)) N_c é o gráfico de uma função $y = g(x)$



$g : I(x_0) \to \mathbb{R}$

$y = g(x)$

$f(x,y) = c$

$x \in I(x_0)$, $y = g(x)$

$f(x, g(x)) = c \quad \forall x \in I$

$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dg}{dx} = 0$

$$\nabla f(x,y) \cdot \underbrace{\left(1, \frac{dg}{dx}\right)}_{\text{vetor direção da reta tangente}} = 0$$

Cálc III 20/2 L10

∇

$\nabla f(x_0, y_0)$

$\cdot \vec{r}\,'(x_0) = 0$

$$\vec{\gamma}(x) = (x, g(x))$$

$$\vec{\gamma}\,'(x) = (1, g'(x))$$

$$\vec{\gamma}\,'(x_0) = (1, g'(x_0))$$