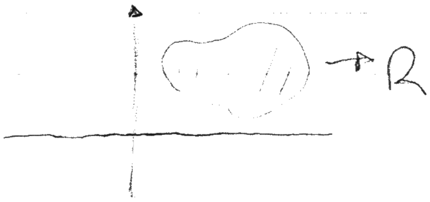
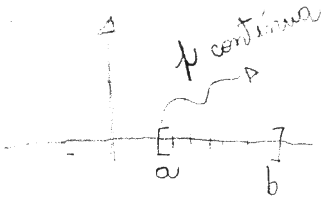
Extremos de funções de duas variáveis

1 - Seja f $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ região fechada / limitada





1) $(a,b) \in \mathbb{R}$ é chamado mínimo de f em R se
$$f(x,y) \geq f(a,b) \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}$$

2) $(a,b) \in \mathbb{R}$ é chamado máximo de f em $\mathbb{R}$ se
$$f(x,y) \leq f(a,b) \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}$$

Teorema: Seja $f: \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua em $\mathbb{R}$

1 - $\exists$ pelo menos um ponto em $\mathbb{R}$ onde f assume um valor mínimo.

2 - $\exists$ pelo menos um ponto em $\mathbb{R}$ onde f assume um valor máximo

—//—

18/02 - Aula 2

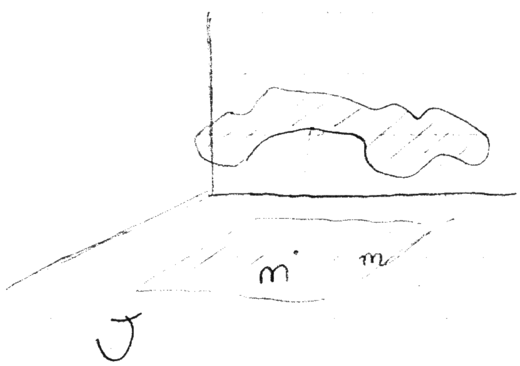
Extremos de funções de duas variáveis

Seja f $J \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, J região fechada e limitada

→ Teorema: Se f é contínua em J →

1 - $\exists$ pelo menos um ponto em J onde f assume o valor mínimo

2 - $\exists$ pelo menos um ponto em J onde f assume o valor máximo



(/ /)

Definição de extremos relativos

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D aberto

$(a, b) \in D$

1- f tem um mínimo relativo em (a, b) se $f(x,y) \geq f(a,b)$ $\forall (x,y) \in B_\epsilon(a,b)$

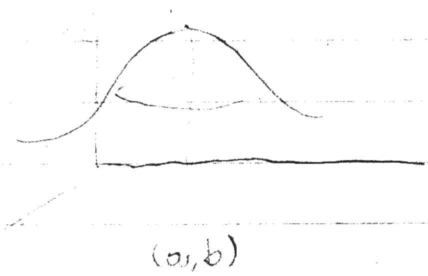
2- f tem um máximo relativo em (a,b) se $f(x,y) \leq f(a,b)$ $\forall (x,y) \in B_\delta(a,b)$.

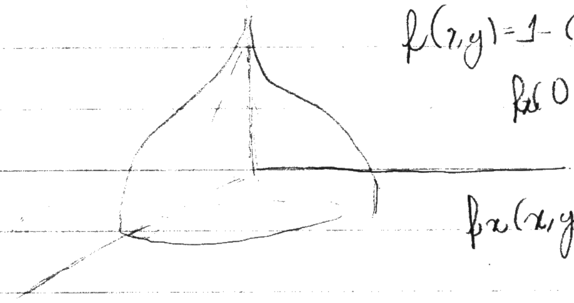
Como localizar extremos relativos

Definição de ponto crítico: $(a,b) \in D$ é um ponto crítico de f se uma das condições seguintes é verdade

1- $f_x(a,b) = 0 = f_y(a,b)$

2- $f_x(a,b)$ ou $f_y(a,b)$ não existe





$f(x,y) = 1 - (x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}$

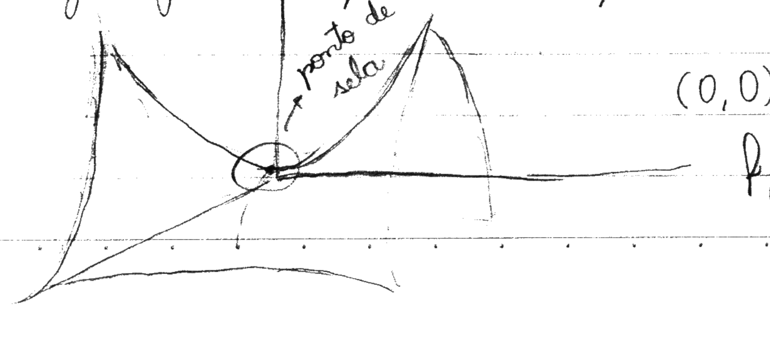
$f(0,0)$

$f_x(x,y) = -\dfrac{1}{3} \dfrac{2x}{(x^2+y^2)^{2/3}}$

Teorema: Extremos relativos ocorrem apenas em pontos críticos. f tem um extremo relativo em $(a;b) \in D$ (aberto) $\to$ (a,b) é um ponto crítico de f.

O teste das derivadas parciais de segunda ordem

$f(x,y) = y^2 - x^2$ (parabolóide hiperbólico)



$(0,0)$ $f_x(x,y) = -2x \,|_{x=0} = 0$

$f_y(x,y) = 2y \,|_{y=0} = 0$

3. Avaliar d

$$d(x,y) = (-6x)(-4) - [4]^2$$
$$= -24x - 16.$$

* $P_1 = (0,0)$, $d(0,0) = -16 < 0$.

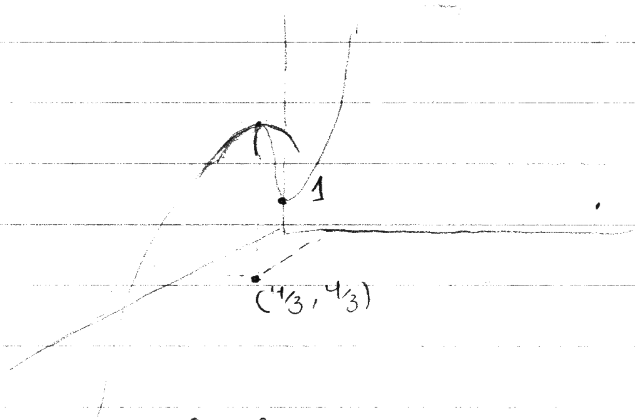
(0,0) é um ponto de sela

* $p_2 = (4/3, 4/3)$

$$d = (4/3, 4/3) = 24 \cdot 4/3 - 16 = 16 > 0$$

$$f_{xx}(4/3, 4/3) = -6 \cdot 4/3 = -8 < 0$$

$(4/3, 4/3)$ um máximo relativo



→ Determinar e classificar os pontos críticos da função

$$f(x,y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4$$

1 - pontos críticos

$$f_x = 6y^2 - 6x^2 = 0 \rightarrow x^2 = y^2 \rightarrow x = \pm y$$
$$f_y = 12xy - 12y^3 = 0$$

1 - $x = y \rightarrow 12x^2 - 12x^3 = 0$

$$x^2(1-x) = 0$$
$$x = 0 \text{ ou } x = 1$$
$$P_1 = (0,0), \ P_2 = (1,1).$$

2 - $x = -y \rightarrow -12x^2 + 12x^3 = 0$

$$x^2(-1+x) = 0$$
$$x = 0, \ x = 1$$

2. Derivadas de segunda ordem
$P_3 = (1, -1)$

$f_{xx} = -12x$, $f_{yy} = 12x - 36y^2$
$f_{xy} = 12y$

3. Avaliar d
$d = (-12\pi)\,[12x - 36y^2) - [12y]^2$

P_2 : $f_{xx}(1,1) = -12 < 0 \rightarrow (1,1)$ é max. rel.
P_3 : $f_{xx}(1,-1) = -12 < 0 \rightarrow (1,-1)$ é max. rel.

$$\left\{ \begin{array}{l} *P_1 = (0,0) \;,\; d(0,0) = 0 \\ *P_2 = (1,1) \;,\; d(1,1) = 144 > 0 \\ *P_3 = (1,-1) \;,\; d(1,-1) = 144 > 0 \end{array} \right.$$

-N-

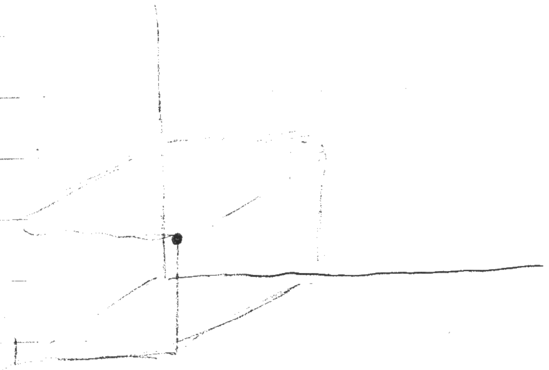
20/02 - Aula 3 (NÃO FUI!)

Encontrando o Volume Máximo

Uma caixa retangular está apoiada no eixo xy com um vértice na origem o vértice oposto está no plano

$$6x + 4y + 3z = 24$$

Encontre o volume máximo de tal caixa.



$V = xyz \rightarrow V(x,y) = \frac{xy}{3}(24 - 6x - 4y) \geq 0$

$V(x,y) = 8xy - 2x^2y - \frac{4}{3}xy^2$

1) $V_x = V_y = 0$
(A) $V_x = 8y - 4xy - \frac{4}{3}y^2 = 0$
(B) $V_y = 8x - 2x^2 - \frac{8}{3}xy = 0$

(A) $y(2 - x - \frac{1}{3}y) = 0$
ou $2 - x = \frac{1}{3}y$