<u>Autovetor</u> correspondente ao autovalor

$\lambda_0 = 1$

$$(S_{00}\ S_{01})\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\lambda_0}\ (S_{00}\ S_{01})$$

Obs.: Autovetor ~~corespo~~ correspondente ao autovalor 1 ~~é~~ seria o vetor da distribuição invariante, SE PEDISSE QUE $S_{00} + S_{01} = 1$ acrescente

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}S_{00} + \frac{1}{2}S_{01} &= S_{00} \\ \frac{1}{4}S_{00} + \frac{1}{2}S_{01} &= S_{01} \end{aligned} \quad \begin{cases} -\frac{1}{4}S_{00} + \frac{1}{2}S_{01} = 0 \\ \frac{1}{4}S_{00} - \frac{1}{2}S_{01} = 0 \end{cases}$$

à mesma equação

A segunda saída impor $\boxed{\begin{aligned} S_{00} &= 1 \\ S_{01} &= 1/2 \end{aligned}}$

(fixa S_{00} e encontra S_{01})

minha solução

$$(S_{10}\ S_{11})\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \lambda_1 (S_{10}\ S_{11})$$

$\lambda_1 = 1/4$

$$\begin{cases} S_{10}\frac{3}{4} + S_{11}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}S_{10} \\ S_{10}\frac{1}{4} + S_{11}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}S_{11} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} S_{10} + \frac{1}{2} S_{11} = 0 \\ \frac{1}{4} S_{10} + \frac{1}{4} S_{11} = 0 \end{cases}$$ a mesma equação

Impor $S_{10} = 1$

Então $S_{11} = -1$

Os autovetores correspondem aos autovalores diferentes de um, não obrigados a atender $S_{10} + S_{11} = 1$

$$S = \begin{pmatrix} S_{00} & S_{01} \\ S_{10} & S_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Constrói a matriz S

Construindo S^{-1} $\quad \boxed{S \cdot S^{-1} = I}$

1.º método : $\begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} \\ x_{10} & x_{11} \end{pmatrix} = S^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} \\ x_{10} & x_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftarrow$$ 4 equações com 4 incógn.

2.º método $\quad (-1)^{i+j}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} +\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & -x & x \\ -\det\begin{pmatrix} a_{01} & a_{02} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & +x & -x \\ +x & -x & x \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left(\quad \right)^T$$

2/9 (12

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1/3 \\ \frac{2}{3} & -2/3 \end{pmatrix}$$

$$P = \underbrace{\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}}_{S^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}}_{\Lambda} \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 1/2} \\ 1 \quad -1 \end{pmatrix}}_{S}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$P^n = S \cdot \Lambda^n S^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (1/4)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}$$

Se $\vec{p}^{(0)} = \left(p_0^{(0)}\ \ p_1^{(0)}\right)$ o vetor da distribuição inicial, então $\vec{p}^{(n)} = \left(p_0^{(n)}\ \ p_1^{(n)}\right)$, o valor da distribuição no tempo n é dado por: $\vec{p}^{(n)} = \vec{p}^{(0)} P^n$

Vejamos o limite de $\vec{p}^{(n)}$ quando $n \to \infty$

$$P^n \xrightarrow{n \to \infty} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Então

$$\left(p_0^{(0)}\ \ p_1^{(0)}\right) P^n \xrightarrow{n \to \infty} \left(p_0^{(0)}\ \ p_1^{(0)}\right) \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} =$$

$$\left(\frac{2}{3} \underbrace{\left(p_0^{(0)} + p_1^{(0)}\right)}_{1} ;\ \frac{1}{3} \underbrace{\left(p_0^{(1)} + p_1^{(0)}\right)}_{1} \right) = \left(\frac{2}{3}\ \ \frac{1}{3}\right)$$

Este é o ~~vator~~ vetor de distribuição invariante da Cadeia de Markov com a matriz de transição P.

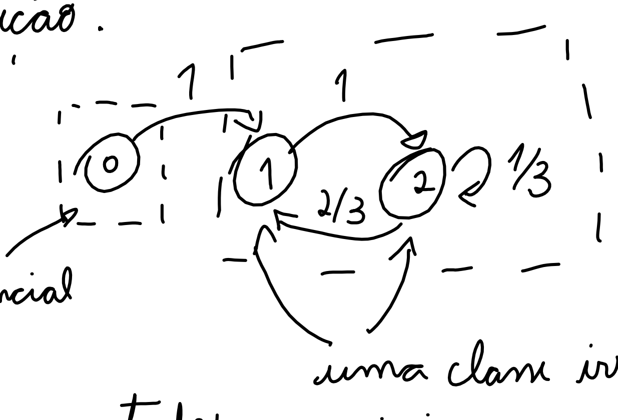
Fato: (genérico, visto no 2/9 exemplo particular):

o vetor da distribuição invariante é o vetor da distribuição limite (em tempo) da Cadeia de Markov boa (irredutível e aperiódica), qualquer que seja a distribuição inicial

---

Classificação dos estados de Cadeia de Markov segundo propriedades de suas probabilidades de transição.

Exemplo



não essencial

uma classe irredutível de estados essenciais

estados

$$P = \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & & & \\ 1 & & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} & \\ 2 & & & \end{array}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 2/9 & 2/9 \end{pmatrix}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 2/9 & 7/9 \\ 0 & 14/27 & 13/27 \end{pmatrix}$$

$$p^{(0)} = \left(3/6 \;\; 2/6 \;\; 1/6 \right) \leftarrow$$ a distribuição inicial

Imagine que lançaremos um dado equilibrado, e se der 1, 2 ou 3 colocaremos uma partícula em 0

4, 5 $\rightarrow$ 1

6 $\rightarrow$ 2

$$p^{(1)} = p^{(0)} \cdot P = \left(3/6 \;\; 2/6 \;\; 1/6 \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\boxed{0} ; \frac{11}{18} ; 7/18 \right)$$

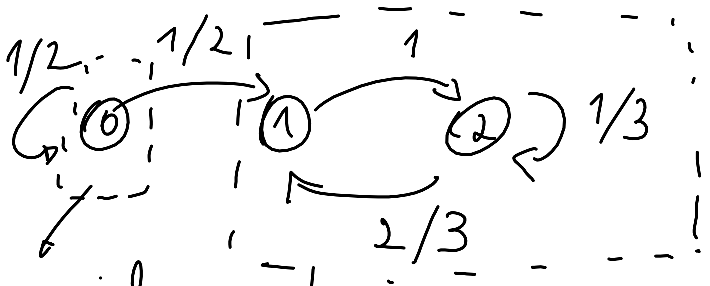
$$p^{(2)} = p^{(0)} P^2 = \left(\boxed{0}, \frac{14}{54}, \frac{40}{54} \right)$$

$$p^{(3)} = p^{(0)} P^3 = \left(\boxed{0}, \text{não zero}, \text{não zero} \right)$$

0 é não essencial, pois a prob. de estar ~~nulo~~ nele em tempos 1, 2, 3, ... é zero p/ qqer qu

seja a distribuição inicial

Exemplo 2



ñ essencial

uma classe irredutível de estados essenciais

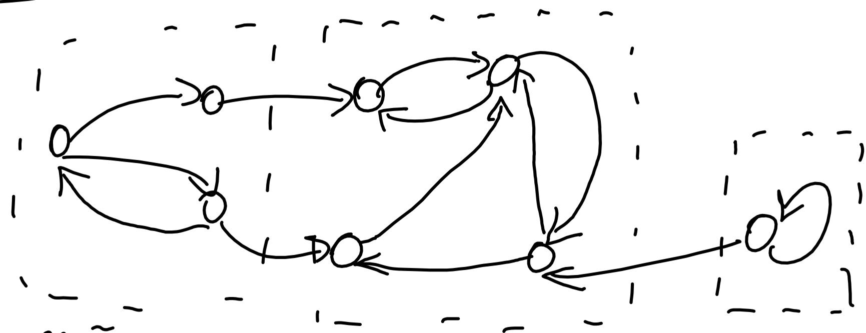
No exemplo 2, a probab. da partícula estar no ⓪ no tempo n é $\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot P_0^{(0)}$, onde $P_0^{(0)}$ é a prob. da partícula estar no ⓪ no instante inicial.

Óbvio: $\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot P_0^{(0)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Neste caso, ⓪ também é não essencial.

Def. geral: Um estado i chama-se não-essencial se existir um outro estado j e um m tal que a prob. de sair de i e chegar a j em n passos é positiva, enquanto que é impossível sair de j e chegar a i.

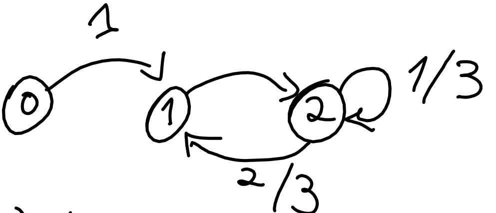
Exemplo 3



não essencial não ~~não essencial~~ essencial não essencial

pensar probabilidade como água

Como achar a distribuição invariante da Cadeia de Markov com estados não essenciais



e mais

$$x + y + z = 1$$

$$(x\ y\ z)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (x\ y\ z)$$

$$\begin{cases} 0x + 0y + 0z = x \Rightarrow \underline{x = 0} \\ 1x + 0y + \frac{2}{3}z = y \\ 0x + 1y + 1/3\, z = y \\ \underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{x} + \underbrace{y + z}_{\tilde{n}\text{-nulos}} = 1 \end{cases}$$

$\downarrow$

Significa que a prob de estar no estado não essencial é zero na distrib. invariante

$$P = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

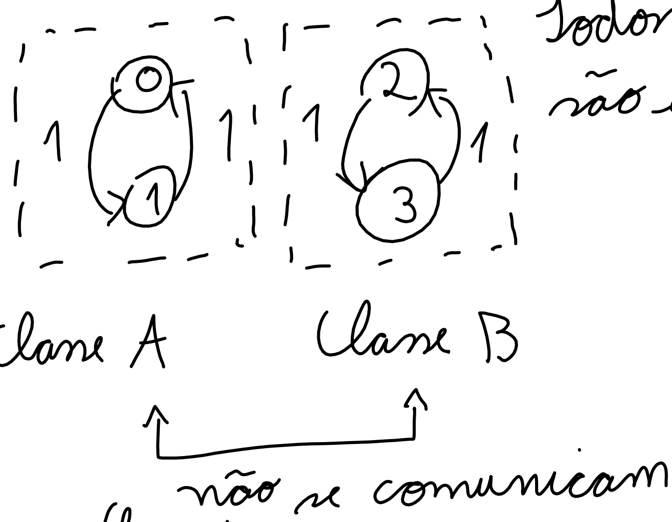
$$(y \ z)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (y \ z)$$

elimine as colunas e linhas dos estados não essenciais. Resolva o problema para matriz reduzida

<u>Classes não comunicantes</u>

<u>Exemplo</u>

Todos os estados são essenciais [19]



Classe A

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

zeros

Classe B

zeros

A classe A tem uma distribuição invariante $(1/2, 1/2)$. A classe B tem uma distribuição invariante $(1/2, 1/2)$. A distribuição invariante da cadeia toda seria

$$\left(q\,\tfrac{1}{2},\ q\,\tfrac{1}{2},\ (1-q)\,\tfrac{1}{2},\ (1-q)\,\tfrac{1}{2}\right)$$ onde

q pode ser qualquer número de $[0; 1]$

A interpretação de q:

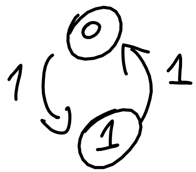
Com probabilidade q a partícula está na Classe A;

Com probabilidade $1-q$ a partícula está na Classe B

Conclusão: vale estudar somente cadeias de Markov com uma classe de estados essenciais. Tais cadeias chamam-se irredutíveis.

<u>Estados periódicos (cíclicos)</u> (aperiódicos

<u>Exemplo</u>:



O período de 0 é 2

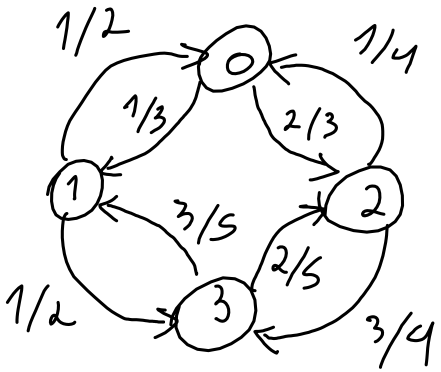
O período de 1 é 2.

Comecei no estado 0 $\longrightarrow$ 0 1 0 1 0 1

Começando de 0, eu posso voltar ao 0 somente nos tempos $2,\ 2\cdot 2,\ 3\cdot 2,\ 4\cdot 2, \ldots$

período

Exemplo



Aqui o período de cada estado é 2.

Como achar o período de um estado de Cadeia de Markov?

Tome o estado 0. Veja se você pode voltar nele em 1 passo.

Sim → periódico de período 1.

Não → veja todos os intervalos de tempo, nos quais você pode voltar, e tome MDC deles

~~Aqui o período de cada estado~~

Em classe de estados essenciais comunicantes todos os estados tem o mesmo período