ESTOC.

26/8 | 08

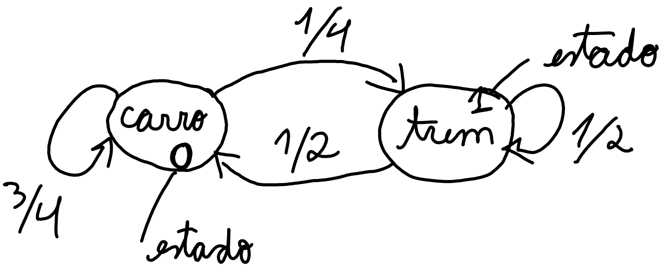
__Distribuição invariante__ de uma Cadeia de Markov

vetor da distribuição invariante

vetor invariante

medida invariante

__Exemplo__ :



Matriz de transição

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Pergunta: qual deve ser a distribuição inicial (no tempo 0) para que no tempo 1 a distribuição seja a mesma?

$\underbrace{(p_0^{(0)}, p_1^{(0)})}_{\text{vetor da distribuição inicial}}$ prob. que no dia 0 o professor vá de ~~tr~~ trem

26/8 L9

$p_0^{(0)}$: a probabilidade que no dia 0 o professor vá de carro

$\left(p_0^{(1)}, p_1^{(1)}\right)$ — no dia 1: o prof. vá de trem

↳ no dia primeiro o prof. vá de carro

Pergunta: quais devem ser os valores de $p_0^{(0)}$ e $p_1^{(0)}$ para que $\left(p_0^{(0)}\ p_1^{(0)}\right) = \left(p_0^{(1)}, p_1^{(1)}\right)$?

<u>SABEMOS</u> $\left(p_0^{(1)}\ p_1^{(1)}\right) = \left(p_0^{(0)}\ p_1^{(0)}\right)P$

Queremos achar $p_0^{(0)}$ e $p_1^{(0)}$ tais que

$$\left(p_0^{(0)}\ p_1^{(0)}\right)P = \left(p_0^{(0)}\ p_1^{(0)}\right)$$

$$\left(p_0^{(0)}\ p_1^{(0)}\right)\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \left(p_0^{(0)}\ p_1^{(0)}\right)$$

Resolvendo

$\vdots$

$$-\frac{1}{4}p_0^{(0)} + \frac{1}{2}p_1^{(0)} = 0$$

$$\frac{1}{4}p_0^{(0)} - \frac{1}{2}p_1^{(0)} = 0$$

uma equação só

Condição: $p_0^{(0)} + p_1^{(0)} = 1$, $\underbrace{p_0^{(0)} \geq 0 \text{ e } p_1^{(0)} \geq 0}$

Quando P é uma matriz estocástica (as entradas são não-negativas e soma em cada linha é 1), a solução deste sistema existe, é única e não negativa.

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}(1 - p_1^{(0)}) + \frac{1}{2}p_1^{(0)} = 0 \\ p_0^{(0)} = 1 - p_1^{(0)} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}p_1^{(0)} = 1/4 \\ p_0^{(0)} = 1 - p_1^{(0)} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} p_1^{(0)} = 1/3 \\ p_0^{(0)} = 2/3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}!$$

carro $2/3$ trem $1/3$ 26/8 L11

O professor vai lançar esta moeda para decidir como ir ao trabalho no tempo 0. Depois, para decidir no tempo 1, ele vai usar a matriz de transição

a de carro é $2/3$ trem $1/3$ carro $2/3$ trem $1/3$

tempo 0

tempo 1

tempo 2, ...

O vetor $\vec{p}$ chama-se invariante para a cadeia de Markov com a matriz de transição P caso $\vec{p}P = \vec{p}$.

Interpretação: se a cadeia de Markov começar da distribuição $\vec{p}$ então esta será a sua distribuição em qualquer outro momento.

Para achar $\vec{p}$ é preciso resolver o sistema

$$\begin{cases} \vec{p}P = \vec{p} \\ p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 \end{cases}$$

← a soma das ~~pa~~ entradas de $\vec{p}$ é 1

ES706

26/8 | 12

Quando P corresponde a uma Cadeia de Markov finita, irredutível e aperiódica, então sempre existe uma única solução para este sistema

Prometo que até vocês aprenderam estes conceitos cuidarei para que todos meus exemplos sejam assim

Como calcular P^k (Capítulo 9 do Clark e Disney)

$$P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$ Objetivo: Achar duas matrizes S e S^{-1} e uma matriz diag.

inversa de S $S S^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$S^{-1} S = I$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \text{ tais que } P = S^{-1} \cdot \Lambda \cdot S$$

$P^2 = P \cdot P = (S^{-1} \Lambda S)(S^{-1} \Lambda S) = S^{-1} \Lambda I \cdot \Lambda \cdot S = S^{-1} \cdot \Lambda^2 \cdot S$. observe: $\Lambda^2 = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 & 0 \\ 0 & \lambda_1^2 \end{pmatrix}$

$$P^n = (S^{-1}\Lambda \cancel{S})(\cancel{S^{-1}}\Lambda \cancel{S})(\cancel{S^{-1}}\Lambda S) \cdots (S^{-1}\Lambda S)$$

$$= S^{-1}\Lambda^n S$$

$$= S^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_0^n & 0\\ 0 & \lambda_1^n\end{pmatrix} S$$

λ_0 e λ_1 são raízes do polinômio característico

$$|P - \lambda I| = 0$$

$$\det(P - \lambda I) = 0 = \det\begin{pmatrix}3/4-\lambda & 1/4\\ 1/2 & 1/2-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{3}{4}-\lambda\right)\left(\frac{1}{2}-\lambda\right) - 1/4 \cdot 1/2 = 0$$

polinômio característico

$$\left(\lambda^2 - \frac{5}{4}\lambda + \frac{3}{8}\right) - \frac{1}{8} = 0$$

$$\lambda^2 - \frac{5}{4}\lambda + \frac{2}{8} = 0$$

$$\lambda_{0,1} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{2}{8}}$$

$$\lambda_0 = 1, \ \lambda_1 = 1/4$$

Observação: Quando P é uma matriz boazinha, então a maior raiz é ~~sem~~ única e é igual a 1 (λ_0) e todas as outras raízes são < 1 em módulo.