ESTOC 19/8 (27

Cadeias de Markov

A. Bruce CLARKE e Ralf L. DISNEY
"Probabilidade e Processos Estocásticos"
QA274.1

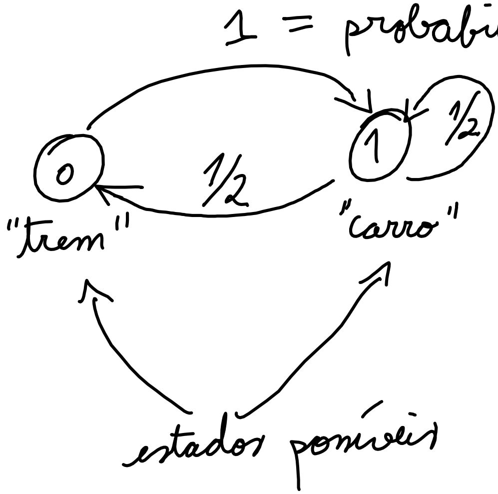
Com mais exemplos e exercícios:
Seymour LIPSCHUTZ
Teoria e Problemas de Probabilidade
QA273.25
Porém, não cobre a matéria até o fim

— // —

Exemplo: ir ao trabalho de trem ou de carro
- Se for de trem, no dia seguinte irei de carro
- Se for de carro, cara = trem, coroa = carro

Diagrama de transição

"uso trem" 0
"uso carro" 1



Se no tempo anterior o estado era 0, então no tempo seguinte o estado será 1 com a probabilidade 1

Se no tempo anterior o estado era "carro", então no tempo proximo, o estado carro será "carro" com prob. 1/2 e "trem" com prob. 1/2

Tempo $\{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$

o 0º dia 1º dia 2º dia

Qual seria a notação cômoda para o estado no n-ésimo dia?

é uma variável aleatória, a qual denotamos X_n

$$\begin{cases} 0 \text{ (trem) c.p. } P_n \\ 1 \text{ (carro) c.p. } 1-P_n \end{cases}$$

Temos $X_0, X_1, X_2, \dots$ uma sequência de variáveis aleatórias amarradas por esta regra. Esta sequência é um 19/9 (29

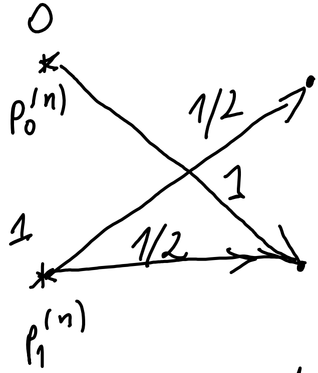
caso particular de cadeia de Markov em tempo discreto com número finito de estados. $\{0, 1, \ldots\}$

Cadeia de Markov porque possui a propriedade de Markov: o estado no tempo n depende somente do estado no tempo $n-1$, quer dizer não depende dos estados nos tempos $n-2, n-3, \ldots, 0$. Nosso exemplo possui a propriedade de Markov por construção!

Vetor $(p_0^{(n)}, p_1^{(n)})$ → a prob de estar no estado 1 no tempo n

a prob. de estar no estado 0 no tempo n.

Pergunta: qual é a relação entre $(p_0^{(n)}, p_1^{(n)})$ e $(p_0^{(n-1)}, p_1^{(n+1)})$?



$$0 \quad p_0^{(n+1)} = \tfrac{1}{2} \cdot p_1^{(n)}$$

$$1 \quad p_1^{(n+1)} = \frac{1}{2} p_1^{(n)} + 1 \cdot p_0^{(n)}$$

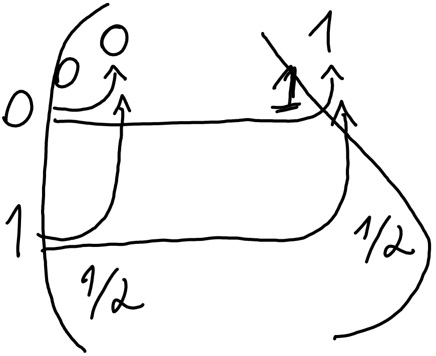
tempo n tempo $n+1$

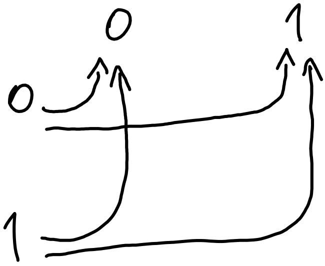
Formalização da Resposta:

$$\begin{pmatrix} p_0^{(n)} & p_1^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0^{(n+1)} & p_1^{(n+1)} \end{pmatrix}$$

matriz de transição da Cadeia de Markov.

Como fazer a matriz de transição a partir do Diagrama de Transição





Propriedades de Matrizes de Transição 19/8 (31)

① Cada entrada é um número de [0 ; 1] (pois cada entrada corresponde a uma probabilidade).

② A soma das entradas em cada linha é 1 (tem que sair para algum lugar)

Qualquer matriz que satisfaz as propriedades 1 e 2 chama-se matriz estocástica(*) e gera uma cadeia de Markov via a relação

$$\left(p_0^{(n)} \; p_1^{(n)} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(p_0^{(n+1)} \; p_1^{(n+1)} \right)$$

$$\vec{p^{(n)}} A = \vec{p}^{(n+1)}$$

O objetivo: dar a interpretação aos valores das entradas de A, A^2, A^3, ...

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ → prob. de passar de 0 para 1 em um passo = p_{01}

assim por diante.

p_{ij} = prob de ir de i p/ j em um passo

$$p^{(n+2)} = p^{(n+1)}A = \left(p^{(n)}A\right)\cdot A =$$

$$= p^{(n)} \cdot (A \cdot A) = \underline{p^{(n} \cdot A^2}$$

A^2 é a matriz de transição em dois passos

$$A^2 = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} p_{00}^2 + p_{01}p_{10} & p_{00}p_{01} + p_{01}\cdot p_{11} \\ p_{10}p_{00} + p_{11}p_{10} & p_{10}p_{01} + p_{11}^2 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{\text{notação}}}$ $\begin{pmatrix} p_{00}^{(2)} & p_{01}^{(2)} \\ p_{10}^{(2)} & p_{11}^{(2)} \end{pmatrix}$

A^n é a matriz de transição em n passos. A notação $\begin{pmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} \end{pmatrix}$

Qual é a probabilidade de Vladimir 19/8 ir de carro no 2º dia? $\boxed{33}$

Falta a condição <u>inicial</u>!

↳ $t = 0$

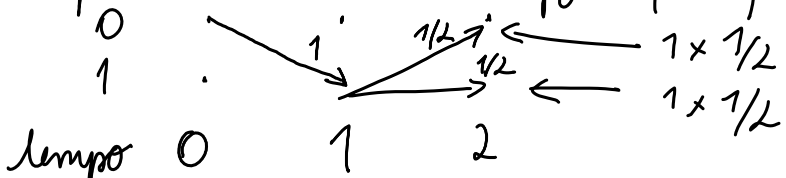
Quais são as alternativas para a condição inicial?

~~Co~~ - Fui de trem $\left(p_0^{(0)}\ p_1^{(0)}\right) = (1\ 0)$

- Fui de carro $= (0\ 1)$

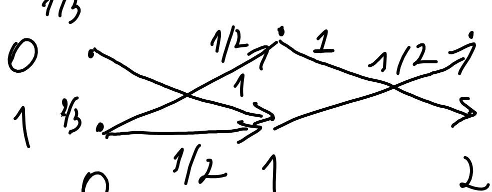
Com a prob x de carro e com prob $1-x$ de trem $= (1-x, x)$

Responder tomando $\left(p_0^{(0)}\ p_1^{(0)}\right) = (1\ 0)$



$$\left(p_0^{(2)}\ p_1^{(2)}\right) = \left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right)$$

Agora para $\left(p_0^{(0)}\ p_1^{(0)}\right) = \left(\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\right)$



$$\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1$$

Para $n > 2$, a repetição desta conta por este método seria uma tarefa complicada.

Quais são as perguntas que permitem "boas" respostas?