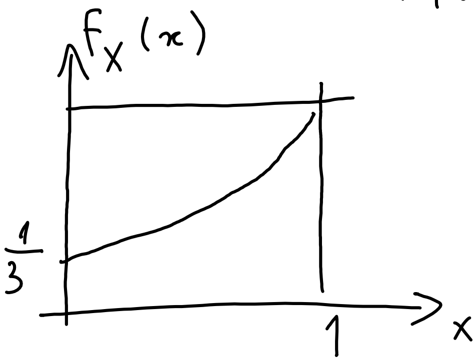
Estocásticos 12/8 L21

Exemplo

$$X = \begin{cases} 0 & \text{cp } 1/3 \\ 1 & \text{cp } 1/3 \\ 2 & \text{cp } 1/3 \end{cases}$$



$$f_X(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^2 = \frac{1}{3}(1 + x + x^2)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)$$ $f_X(x)$ é contínua, crescente e convexa $f_X(1) = 1$, $f_X(0) \geq 0$ em geral, então valem também

Caso Geral

(I) $f_X(0) = \mathbb{P}[X=0] = \mathbb{P}[Z_1=0]$

$$f_X(x)\Big|_{x=0} = (\mathbb{P}[X=0] + \mathbb{P}[X=1]\cdot \cancel{x^1}^{\,0} + \mathbb{P}[X=2]\cdot x^2 + \dots$$

(II) $f_X(1) = 1$ (soma das propabilidades

(III) $f_X(x)$ é contínua em $x \in [0,1]$

(constantes contínuas multiplicadas por potência de x, somadas, também são contínuas

IV) $f_X(x)$ é não decrescente em x

V) $f_X(x)$ é diferenciável infinitas vezes pelo mesmo motivo (cada parcela é).

VI) $f_X'(x) = 0 + \mathbb{P}[X=1] + 2\mathbb{P}[X=2]x + 3\,\mathbb{P}[X=3]\cdot x^2 + \dots$ É óbvio que $f_X'(x) \geq 0$ p/ qq $x \in [0,1]$ $\Rightarrow f_X(x)$ é crescente em x (já temos)

$f_X''(x) = 2\mathbb{P}[X=2] + 3\cdot 2\mathbb{P}[X=3]\cdot x + \dots$

É óbvio que $f_X''(x) \geq 0$ para qq $x \in [0,1]$

$\Rightarrow f_X(x)$ é convexa

PROCESSO DE RAMIFICAÇÃO

$t=0$ 1 indivíduo

$t=1$ $Z_1 = X$ o tamanho da pop. no tempo 1

$t=2$ $Z_2 = X_1 + X_2 + \dots + X_{Z_1}$, onde X's são independentes e cada uma tem a mesma distribuição que X

⋮

$t = k \quad Z_k = X_1 + X_2 + \dots + X_{Z_{k-1}}$

Lembrete: $\left.\begin{array}{l} N = \text{contadora} \\ S = X_1 + \dots + X_N \end{array}\right\} \Rightarrow f_S(x) = f_N(f_X(x))$

$f_{Z_1}(x) = f_X(x)$

$f_{Z_2}(x) = f_{Z_1}(f_X(x)) = f_X(f_X(x))$

contadora para

$f_{Z_3}(x) = \dots = f_X(f_X(f_X(x)))$

Em geral: $f_{Z_k}(x) = \underbrace{f_X(f_X(\dots(f_X(x)))}_{K \text{ vezes}}$

De volta ao problema

$\mathbb{P}[Z_k = 0]$ interpreta-se como a prob. de extinção até o tempo K

$\mathbb{P}[Z_1 = 0] < \mathbb{P}[Z_2 = 0] \leq \mathbb{P}[Z_3 = 0] < \dots$

$0 \leq \mathbb{P}[Z_K = 0] \leq 1 \Rightarrow \lim_{k \to \infty} \mathbb{P}[Z_K = 0]$ existe

chamado de prob. de extinção do processo

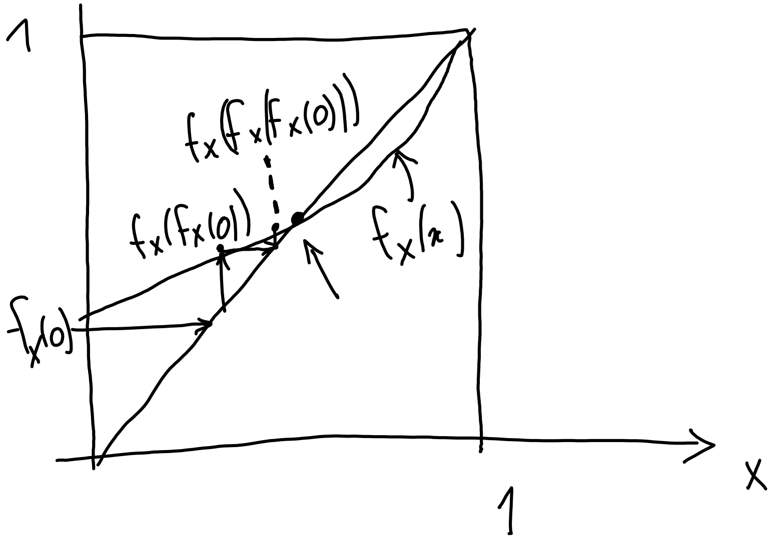
este valor interpreta-se a prob de que cedo ou tarde não haverá nenhum indivíduo

$$\boxed{f_Y(0) = \mathbb{P}[Y=0]}$$

$$P[Z_1=0] < P[Z_2=0] < P[Z_3=0] < \dots$$

$$f_{Z_1}(0) \qquad f_{Z_2}(0) \qquad f_{Z_3}(0)$$

$$f_X(0) \qquad f_X(f_X(0)) \qquad f_X(f_X(f_X(0)))$$



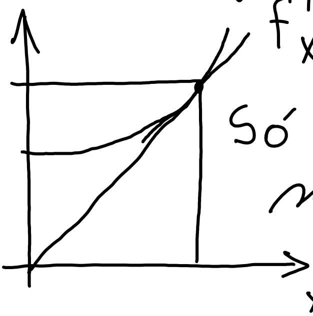
<u>Descoberta</u>:

$$\underbrace{f_X(f_X(\dots(f_X(0))))}_{k \text{ vezes}} \text{ converge}$$

$f_{Z_K}(0)$

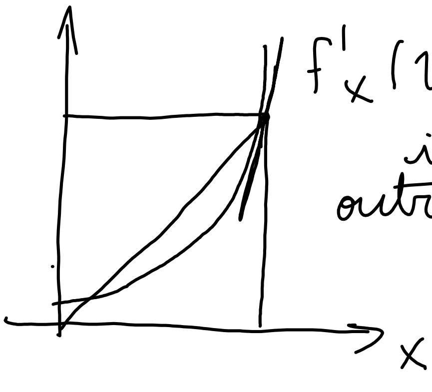
conforme K crescer, a ~~abs~~ abcisa do menor ponto de intersecção de $f_X(x)$, $x \in [0,1]$ com a diagonal.

Quantos pontos de intersecção com a diagonal pode ter função crescente, convexa, contínua e que assume 1 no $x=1$?



$f'_X(1) \leq 1 \quad E[X] \leq 1$

Só tem uma intersecção e sua abcissa é 1



$f'_X(1) > 1 \quad E[X] > 1$

intersepta em 1 e em outro ponto, menor que 1

<u>Teorema</u>: Se $E[X] \leq 1$ então a prob. de extinção do processo é 1 (cedo ou tarde todos morrem). Se $E[X] > 1$, então a probabilidade de ext. do proc. é menor que 1, seu valor r é dado como a menor solução de $f_X(r) = r$

(diz-se "menor" porque sempre existe a solução

1, isto é: $F_X(1) = 1$) isto significa que com a probabilidade $r < 1$ cedo ou tarde tudo morrerá, e com probabilidade $1 - r > 0$ sempre haverá vivos.

Interpretação intuitiva para o caso $E[X] > 1$: Se você observar 1.000.000 (muitas) ~~valorizações~~ realizações do processo de ramificação, em proporção r delas você verá extinção, e em proporção $1-r$ delas, você verá sempre gente viva.

Exemplo X (número de filhos) tem distribuição geométrica de parâmetro q $(0 < q < 1)$

$$\mathbb{P}[X = 0] = (1-q)$$

$$\mathbb{P}[X = 1] = q\,(1-q)$$

$$\mathbb{P}[X = 2] = q^2\,(1-q)$$

$$\mathbb{P}[X = k] = q^k\,(1-q)$$

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X=0] + \mathbb{P}[X=1]\,x^1 + \ldots =$$

$$= (1-q) + (1-q)\,q\,x + (1-q)\,q^2 x^2 + \ldots$$

$= (1-q)\left[1 + qx + (qx)^2 + (qx)^3 + \dots\right] =$

$= (1-q)\left[\dfrac{1}{1-qx}\right] = \dfrac{1-q}{1-qx}$

$E[X] = 0 \cdot P[X=0] + 1 \cdot \mathbb{P}[X=1] + 2\mathbb{P}[X=2] +$
$+ \dots$ $E[X] = f_X'(1)$

$(1-q)(1-qx)^{-1} = (1-q)\left[-q(1-qx)^{-2}(-1)\right]$

$f_X'(1) = \dfrac{(1-q)q}{(1-q)^2} = \dfrac{q}{1-q}$

$E[X] \le 1$

1) Se $\dfrac{q}{1-q} \le 1$, então o processo extingue-se

com a prob. 1.

2) Se $\dfrac{q}{1-q} > 1$, então o processo ext. com
$\to E[X] > 1$

a prob. r que satisfaz $\dfrac{1-q}{1-qr} = r = f_X(r)$

1) $0 < q \le 1/2$ $\quad$ 2) $\frac{1}{2} < q < 1$

$\hookrightarrow$ acordo $\quad$ $\hookrightarrow$ acordo

$1-q = r - qr^2$

$qr^2 - r + (1-q) = 0$

$r_{12} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4q(1-q)}}{2q} = \dfrac{1 \pm (2q-1)}{2q}$

$r_1 = 1$, $r_2 = \dfrac{1-q}{q}$ a prob. de ext. do processo