Processos Estocásticos 5/8 | 11

Vladimir Belitsky
belitsky@ime.usp.br
segunda e quinta de manhã no IME

Saída: 22:30
Intervalo: 20:50 - 21:10

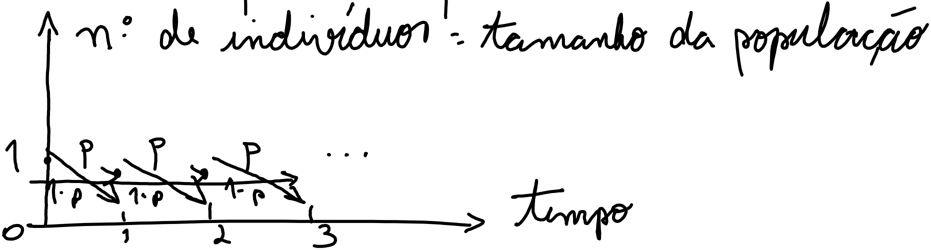
—— // ——

Processo de Ramificação

No tempo 0 há um indivíduo.
No tempo 1 gera X filhos, onde X é uma V.A., e morre.
No tempo 2, cada indivíduo (nascido no tempo 1) gera X filhos (de maneira independente), e morrem. Assim por diante.

Exemplo 1

$$X = \begin{cases} 1 & \text{com prob. } p = 2/3 \\ 0 & \text{com prob. } 1-p = 1/3 \end{cases}$$



Z_0 · o tamanho da população no tempo 0 (12

Z_1 · o tamanho da população no tempo 1

$Z_2, Z_3, \ldots$

$Z_0 = 1$ — condição inicial

$$Z_1 = \begin{cases} 1 & \text{c. p. } p \\ 0 & \text{c. p. } 1-p \end{cases} \quad (\equiv X)$$

$$Z_2 = \begin{cases} 1 & \\ 0 & \text{c p } (1-p)\,1 + p(1-p) \end{cases}$$

$$Z_3 = \begin{cases} 1 & \text{c p } ppp \\ 0 & \text{c p } (1-p)\cdot 1\cdot 1 + p(1-p)\,1 + pp(1-p) \end{cases}$$

$P[Z_K \neq 0]$ chama-se a prob. de sobrevivência até o tempo K

$P[Z_k = 0]$ chama-se a prob. de extinção até (incluindo) o tempo k

$P(Z_k = 0, Z_{k-1} \neq 0, Z_{k-2} \neq 0, \ldots, Z_1 \neq 0, Z_0 \neq 0]$ chama-se a prob. de extinção exatamente no instante k

$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}[Z_k \neq 0]$ chama-se a probabilidade de sobrevivência do processo

$1 - \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}[Z_k \neq 0]$ chama-se a probabilidade de extinção do processo.

No nosso caso

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}[Z_k \neq 0] = \lim_{k\to\infty} p^k = 0$$

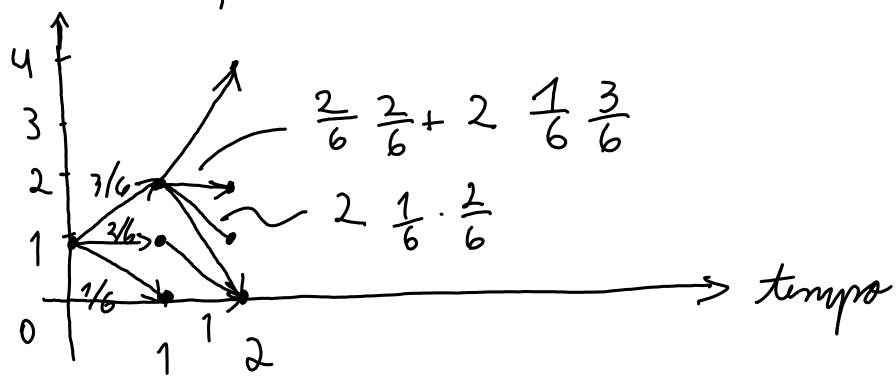
pressuposto $p < 1$

Conclusão: a probabilidade de sobrevivência é 0 e, portanto, a ~~po~~ prob. de extinção é 1.
Interpretação intuitiva: certamente, mais cedo ou tarde, não haverá ninguém na população

FIM DO EXEMPLO

Exemplo 2

$$X = \begin{cases} 2 & \text{c p } 3/6 \\ 1 & \text{c p } 2/6 \\ 0 & \text{c p } 1/6 \end{cases}$$



Mostrei que achar a expressão exata para a distribuição de Z_k (tamanho da população no tempo k) é uma tarefa complicada para a maioria das distribuições de X

FIM DO EXEMPLO II

Função Geradora de Momentos

Dada uma v.A. discreta Y, a sua

f.g.m denota-se por $f_X(x)$ e define-se

$$f_X(x) = \sum_{(k)} \mathbb{P}[X=k] \cdot x^k, \quad x \in [0;1]$$

(k) percorre por todos os valores que X pode assumir.

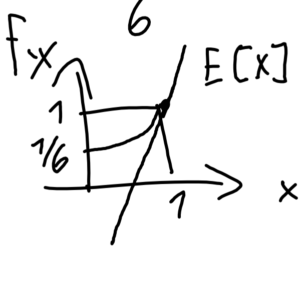
os valores de X formam um subconjunto de $\mathbb{Z}$ (nosso caso $\mathbb{N}$)

X do Exemplo 2:

$$X = \begin{cases} 2 & p \ 3/6 \\ 1 & p \ 2/6 \\ 0 & p \ 1/6 \end{cases}$$

$$f_X(x) = \mathbb{P}[X=0] \cdot x^0 + \mathbb{P}[X=1] x^1 + \mathbb{P}[X=2] x^2 = 1/6 + \frac{2}{6} x + 3/6 \, x^2$$

$$= \frac{1}{6} (1 + 2x + 3x^2)$$



Propriedades 17

① a mais simples : ~~f(x)~~ $f_X(0) = \mathbb{P}[X=0]$

② Um pouco mais sofisticada

$$E[X] = f_X'(1) = \left[\frac{\partial}{\partial x} f_X(x)\right]\Bigg|_{x=1}$$

$$\frac{d}{dx}$$

Verificamos no exemplo :

De um lado : $E[X] = \frac{1}{6}\,0 + \frac{2}{6}\,1 + \frac{3}{6}\,2$

De outro lado

$$f_X'(x) = \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{6}\,x^1 + \frac{3}{6}\,x^2\right)' =$$

$$= \left(0 + \frac{2}{6}\cdot 1 x^0 + 2\,\frac{3}{6}\,x\right)$$

$$= \left(0 + \frac{2}{6}\cdot 1\cdot \cancel{x} + \frac{3}{6}\cdot 2\cdot \cancel{x}\right)$$

$$E[x]\ \frac{1}{6}\cdot 0 + \frac{2}{6}\cdot 1 + \frac{3}{6}\cdot 2$$

3) A mais ousada

Se X e Y são variáveis aleatórias independentes e se

$$Z = X + Y, \text{ então: } f_Z(x) = f_X(x) \cdot f_Y(x)$$

Exemplo

$$X = \begin{cases} 1 & \text{c.p. } a \\ 0 & \text{c.p. } 1-a \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1 & \text{c.p. } b \\ 0 & \text{c.p. } 1-b \end{cases}$$

Independência entre X e Y implica que a tabela da distribuição conjunta de X e Y é:

$Y \backslash X$	0	1
0	$(1-a)(1-b)$	$a(1-b)$
1	$(1-a)b$	ab

$$P[X=0, Y=0] = P[X=0] \cdot P[Y=0]$$

$Z = X+Y$	0	1	2
Prob.	$(1-a)(1-b)$	$a(1-b) + (1-a)b$	ab

18

$$f_X(x) = (1-a)\,x^0 + a x^1 = 1$$
$$= (1-a) + ax$$

$$f_Y(x) = (1-b) + bx$$

$$f_V(x) = \sum_k \mathbb{P}[V=k]\cdot x^k$$

$$f_Z(x) = (1-a)(1-b) + \{a(1-b) + b(1-a)\}x^1$$
$$+ \cancel{abx}\; abx^2$$

Quero calcular $f_X(x)$, $f_Y(x)$ $f_Z(x)$ e verificar se $f_Z(x) = f_X(x)\,f_Y(x)$

$$f_X(x)\cdot f_Y(x) = [(1-a) + ax][(1-b) + bx] =$$

$$= (1-a)(1-b) + a(1-b)x + (1-a)bx + abx^2$$

é de fato igual a $f_Z(x)$

4) Sem nome

Exemplo

$$\underset{\text{contadora}}{N} = \begin{cases} 0 & \text{cp } 1/6 \\ 1 & \text{cp } 2/6 \\ 2 & \text{cp } 3/6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 & \text{cp } p = 2/3 \\ 0 & \text{cp } 1-p = 1/3 \end{cases}$$

$X_1, X_2, X_3, \ldots$

São VA independentes e cada uma delas tem esta distribuição

número de ocorrências

VA

Definição $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ severidade de cada sinistro

perda acumulada

genérico

Quero mostrar $f_S(x) = f_N(f_X(x))$

$P[S=0 \mid N=0] = 1$

$P[S=k \mid N=1] = P[X_1 = k]$

$\begin{cases} P[S=0 \mid N=1] = 1-p \\ P[S=1 \mid N=1] = p \end{cases}$

$P[S=k \mid N=2] = P[X_1 + X_2 = k]$

$\begin{cases} P[S=0 \mid N=2] = (1-p)^2 \\ P[S=1 \mid N=2] = 2p(1-p) \\ P[S=2 \mid N=2] = p^2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} P[S=0] &= P[S=0 \mid N=0]\, P[N=0] \\ &+ P[S=0 \mid N=1]\, P[N=1] \\ &+ P[S=0 \mid N=2]\, P[N=2] \end{aligned}$$

$$= \{ 1 \cdot 1/6 + (1-p)\, 2/6 + (1-p)^2 \cdot 3/6 \}$$

$$P[S=1] = P[S=1 \mid N=1] \cdot P[N=1] + P[S=1 \mid N=2] \cdot P[N=2] = \left[p \frac{2}{6} + 2p(1-p) \frac{3}{6} \right]$$

$$P[S=2] = P[S=2 \mid N=2] \, P[N=2] = \left(p^2 \cdot \frac{3}{6} \right)$$

$$f_S(x) = \{ \dots \} + [\ ]\, x + (\dots)\, x^2$$

Outro lado do $f_S(x) = f_N(f_x(x))$

Obs.: $P[X_i = 1] = p$

$$f_N(x) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} x + \frac{3}{6} x^2$$

$$f_X(x) = (1-p) + px$$

$$f_N(f_X(x)) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} f_X(x) + \frac{3}{6} [f_X(x)]^2$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \{ (1-p) + px \} + \frac{3}{6} \{ [(1-p) + px]^2 \}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{2}{6}(1-p) + \frac{3}{6}(1-p)^2 +$$

$$+ \left[\frac{2}{6} p + 2(1-p)\underset{\uparrow}{\,} p \right] x + \left(\frac{3}{6} \cdot p^2 \right) x^2$$

$3/6$