Estoc 9/3

Processos Estocásticos

Def. dizemos que uma coleção de VAs $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots$, indexadas por $i_k \in T$ é um processo estocástico. Em geral, T representa tempo

$X_{i_k} \in \mathbb{R}$

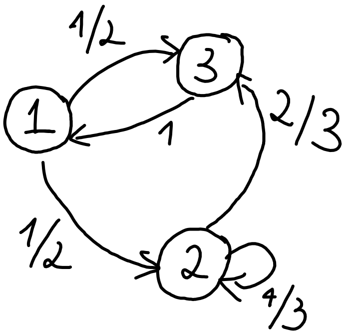
Def. Cadeias de Markov $X_0, X_1, X_2, \dots \in S$, S finito tempo discreto

$$P(X_n = x_n \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots X_{n-1} = x_{n-1})$$
$$= P(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1})$$

∴ Propriedade de Markov (cadeia de Markov de alcance 1).

S: espaço de estados

Exemplo: $S = \{1, 2, 3\}$



$$P(X_n = 3 \mid X_{n-1} = 2) = 2/3$$
$$P(X_n = 2 \mid X_{n-1} = 2) = 1/3$$
$$P(X_n = 1 \mid X_{n-1} = 2) = 0$$

$P(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1})$ é chamada Probabilidade de Transição.

Se $P(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}) = p(x_{n-1}, x_n)$ (só depende dos estados x_n, x_{n-1}), não depende de n, o processo é dito homogêneo ou estacionário. note que

$$\sum_{x_n \in S} P(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}) = 1$$

As probabilidades de transição são apresentadas de forma matricial, matriz de transição P, como segue

$$P_{ij} = P(i,j) = P(X_k = i \mid X_{k-1} = i)$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1S} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2S} \\ \vdots & & & \\ P_{S1} & P_{S2} & \cdots & P_{SS} \end{bmatrix}$$

<u>Exemplo</u>: P

$$S = \{1,2,3,4\} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$P(X_1 = 3) = ?$ e $X_0 = \cancel{0}\ 1$

$P(x_1 = 3) = P(x_1 = 3 \mid X_0 = 1) = 1/2$

$$P(X_1 = 3) = \sum_{x \in S} P(x_1 = 3, X_0 = x)$$

$$= \sum_{x \in S} \underbrace{P(x_1 = 3 \mid X_0 = x)}_{P} \cdot P(X_0 = x)$$

$$= P(x_1 = 3 \mid X_0 = 1) \cdot 1$$

b) Distribuição Inicial

$$\pi_0 = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$$

$P(X_0 = 1)$ $P(X_0 = 2)$ $P(X_0 = 3)$ $P(X_0 = 4)$

$$P(X_1 = 3) = \sum_{x \in S} P(X_1 = 3, X_0 = x)$$

$$= \sum_{x=1}^{4} P(X_1 = 3 \mid X_0 = x) \cdot P(X_0 = x)$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{x=1}^{4} P(X_1 = 3 \mid X_0 = x)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 1 = 1/4$$

c) $P(X_3 = 1 \mid X_0 = 2)$

$$= \sum_{x=1}^{4} P(X_2 = 1, X_1 = x \mid X_0 = 2)$$

$$= \frac{P(X_2 = 1, X_0 = 2)}{P(X_0 = 2)} = \sum_{x \in S} \frac{P(X_2 = 1, X_1 = x, X_0 = 2)}{P(X_0 = 2)}$$

$$= \sum \frac{P(X_2 = 1 \mid X_1 = x, X_0 = 2)\, P(X_1 = x, X_0 = 2)}{P(X_0 = 2)}$$

Prop. Markov

$$= \sum_{x=1}^{4} P(X_2 = 1 \mid X_1 = x)\, P(X_1 = x \mid X_0 = 2)$$

$$= P_{11} P_{21} + P_{21} P_{22} + P_{31} P_{23} + P_{41} P_{24}$$

$$= P_{21} P_{11} + P_{22} P_{21} + P_{23} P_{31} + P_{24} P_{41}$$

$$= 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + 0 + 0 = \frac{1}{9}$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} 4/6 \\ 1/9 \\ \\ \end{bmatrix}$$