MAC-414 5/9/08 (003

Linguagens Formais e Autômatos

3 Provas sem ~~lista~~ sub

Listas não obrigatórias

.../~nami/mac414-08

se passar de média, não precisa de presença.

— // —

I) Alfabeto, palavras e linguagens

Um alfabeto é um conjunto finito, não-vazio, de símbolos (ou letras ou caracteres

Ex.: {a, ..., z, A, ..., Z}, {0, ..., 9}, {0, 1} ou {a, b}, conjunto dos caracteres ASCII

Denotamos um alfabeto qualquer por Σ (sigma)

Uma palavra sobre um alfabeto Σ é uma sequência finita de símbolos de Σ

- representação: $x = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_3$, com $\sigma_i \in \Sigma$, p $1 \leq i \leq n$ (ao invés de $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$)

<u>Exemplo</u>: algumas palavras sobre $\Sigma = \{a, b, c\}$ a, c, ab, aa, cab, bba, ...

- O <u>comprimento</u> de uma palavra x denotado por $|x|$, é a quantidade de símbolos que compõem a palavra x (não-únicos)

Ex.: (aabacba) = 7

- Existe uma única palavra de comprimento zero, chamada de <u>palavra vazia</u> e denotada por λ (ou ε, ou 1). Ela é uma palavra sobre qualquer alfabeto.

- O número de ocorrências de uma letra σ de Σ numa palavra x sobre Σ é denotada por $|x|_\sigma$

<u>Exemplo</u>: Sejam $\Sigma = \{a, b, c\}$ e $x = baaba$

$|x|_a = 3$

$|x|_b = 2$ $\qquad |x| = |x|_a + |x|_b + |x|_c$

$|x|_c = 0$

Obs.: seja x uma palavra sobre Σ

$$|x| = \sum_{\sigma \in \Sigma} |x|_\sigma$$

Algumas notações:

- Σ^k, p $k \geq 0$, é o conjunto de todas as palavras sobre Σ de comprimento k

($\Sigma^1 = \Sigma$ e $\Sigma^0 = \{\lambda\}$

- Σ^* é o conjunto de todas as palavras sobre Σ ($\Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \ldots$)
- Σ^+ é o conjunto de todas as palavras não-vazias sobre Σ

($\Sigma^+ = \Sigma^* - \{\lambda\}$

- A concatenação de duas palavras sobre Σ é uma operação binária

$$\begin{aligned} \Sigma^* \times \Sigma^* &\longrightarrow \Sigma^* \\ (x, y) &\longmapsto xy \end{aligned}$$

Ex: $\Sigma = \{a, b, c\}$

$x = abaa$

$y = acb$

$xy = abaaacb$

$yx = acbabaa$

Algumas propriedades

Algumas Propriedades

5/4/8 006

1) $\forall x \in \Sigma^*$, $\lambda x = x = x\lambda$
(λ é o elemento neutro para concatenação de palavras) ou identidade

2) $\forall x, y, z \in \Sigma^*$, $(xy)z = x(yz)$
(ou a concatenação de pal. é associativa)

3) $\forall x, y, \in \Sigma^*$, $|xy| = |x| + |y|$

(Um monóide é um conj. com uma operação binária associativa e tem um elemento neutro - 2 e 1)

- Σ^* é um monóide, chamado de monóide livre
- Para uma palavra x em Σ^* e $n \geq 0$, a n-ésima potência de x, denotada por x^n, é def. por:

$$x^0 = \lambda$$
$$x^n = x^{n-1}x \text{, para } n > 0$$

Algumas Propriedades

C007

$\forall x \in \Sigma^*, \forall m, n \geq 0,$

1) $|x^m| = m|x|$
2) $x^m x^n = x^{m+n}$
3) $(x^m)^n = x^{m \times n}$
4) $\lambda^m = \lambda$

2) $x^m x^n = x^{m+n}$

Seja x em Σ^*

Vamos provar que: p/todo $n \geq 0$, vale que $\forall m \geq 0$, $x^m x^n = x^{m+n}$

(por indução em n)

Base: $n = 0$

$$\forall m \geq 0, \; x^m x^n = x^m x^0 \overset{\text{def. pot.}}{=} x^m \lambda = x^m = x^{m+0} = x^{m+n}$$

Seja $n \geq 0$

Hipótese de indução:

Suponha que $\forall m \geq 0$, $x^m x^n = x^{m+n}$

Passo da indução:

$$\forall m \geq 0, \; x^m x^{n+1} \overset{\text{def pot}}{=} x^m (x^n + x) \overset{\text{ASSOC. CONCAT}}{=} (x^m x^n) x =$$

2)

$\overset{1}{=} x^{m+n} x \overset{\text{def. pot}}{=} x^{m+n+1}$

Sejam x e u em Σ^*. Dizemos que

- u é um <u>prefixo</u> de x se existe v em Σ^* tq $x = uv$
- u é um sufixo de x se existe v em Σ^* tq $x = vu$
- u é um <u>fator</u> (ou segmento) de x se existem v e w em Σ^* tq $x = vuw$

Obs.:

1) x e λ são prefixos, sufixos e fatores de x

2) Se $|x| = n$, então p/cada k, $0 \leq k \leq n$, x tem um único prefixo e um único sufixo de comprimento k.

<u>Notação</u>: Seja x em Σ^*

Pref(x) = conj. de todos os prefixos de x

Suf(x): " " " fatores de x

($n+1$ sufixos e $n+1$ prefixos)

- Dizemos que u é um *fator* (ou um prefixo ou sufixo) *próprio* de x se $u \neq \lambda$ e $u \neq x$ 009

- Para $k \geq 1$ e $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ em Σ^*, dizemos que a seq $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ é uma *fatoração* de x em k fatores se

$$x = x_1 x_2 \cdots x_k.$$

- Uma *fatoração* é *própria* se $k > 1$ e $x_i \neq \lambda$ p/ $1 \leq i \leq k$

- *Propriedade* (lei do cancelamento)

$\forall x, y, z$ em Σ^*,

se $xy = xz$ então $y = z$ e se $yx = zx$, também.

O inverso de uma palavra x em Σ^*, denotado por x^R, é definido por

$$\lambda^R = \lambda$$

$$(\sigma y)^R = y^R \sigma, \text{ p/ } \sigma \in \Sigma \text{ e } y \in \Sigma^*$$

Dizemos que uma palavra é um *palíndromo* se $x = \cancel{x^*}\ x^R$.

Algumas Propriedades

Coro

1) Se $x = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k$, com $\sigma_i \in \Sigma$ p/ $1 \leq i \leq k$, então $x^R = \sigma_k \cdots \sigma_2 \sigma_1$

2) $\forall x, y \in \Sigma^*$ $(xy)^R = y^R x^R$

3) $\forall x \in \Sigma^*$, $(x^R)^R = x$

Autom. 7/8/18 [001]

2) $\forall x, y \in \Sigma^*, (xy)^R = y^R x^R$

Prova por indução no $|x|$

- Base da indução: $|x| = 0$; então, $x = \lambda$

Logo, $(xy)^R = (\lambda y)^R = y^R = y^R \lambda = y^R \lambda^R = y^R x^R$

- Seja $n \geq 0$

- Hipótese de indução: Suponha que $\forall x, y \in \Sigma^*$, com $|x| = n$, $(xy)^R = y^R x^R$

- Passo da indução: Sejam x e $y \in \Sigma^*$, com $|x| = n+1$. Então, $x = \sigma u$, p/ $\sigma \in \Sigma$ e $u \in \Sigma^*$.

Logo, $(xy)^R = ((\sigma u) y)^R \underset{ASSOC}{=} (\sigma (u y))^R =$

$$
\begin{aligned}
\text{def reverso} \quad &= (uy)^R \sigma \\
\text{R.i.} (|u| = n) \quad &= (y^R u^R) \sigma \\
\text{assoc.} \quad &= y^R (u^R \sigma) \\
\text{def. reverso} \quad &= y^R (\cancel{u\sigma}\ \sigma u)^R \\
&= y^R x^R
\end{aligned}
$$

- Uma linguagem sobre Σ é um subconjunto de Σ^*

Exemplos: $\emptyset$, Σ, Σ^*, $\{\lambda\}$, $\{a, b, aa, ab\}$, $\{x \in \Sigma^* : |x| < 100\}$, $\{x \in \Sigma^* : |x| \text{ é par}\}$, $\{x \in \{a,b\}^* : |x|_a$ ~~[illegible]~~ é par$\}$

$\{x \in \{a,b,c\}^* : |x|_a = |x|_b = |x|_c\}$, 1002

$\{a^n b^n c^n : n \geq 0\}$

$\{x \in \Sigma^* : x = x^R\}$, $\{xx : x \in \Sigma^*\}$

$\{x \in \{0,1\}^* : |x|_0 \equiv 1 \pmod 3\}$

- Operações sobre linguagens

1) Operações booleanas: Sejam $A, B \subseteq \Sigma^*$

- união: $A \cup B = \{x \in \Sigma^* : x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- intersecção: $A \cap B = \{x \in \Sigma^* : x \in A \text{ e } x \in B\}$
- diferença: $A - B = \{x \in \Sigma^* : x \in A \text{ e } x \notin B\} = A \cap \overline{B}$
- complemento (com relação a Σ^*):
  $\overline{A} = \Sigma^* - A = \{x \in \Sigma^* : x \notin A\}$

Leis de De Morgan

$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

2) Concatenação

Sejam A e $B \subseteq \Sigma^*$

$AB = \{w \in \Sigma^* : w = xy, \text{ com } x \in A \text{ e } y \in B\}$

$\quad = \{xy \in \Sigma^* : x \in A \text{ e } y \in B\}$

Exemplo 1: Sejam $\Sigma = \{a, b\}$, $A = \{\Lambda, a, ab\}$ e

$B = \{a, ba\}$

$AB = \{ a, ba, aa, aba, \cancel{aba}, abba \}$ (003

$BA = \{ \ldots \}$

Exemplo 2: Sejam $\Sigma = \{0, 1\}$, $A = \{x \in \Sigma^* : |x|_0$ é par$\}$ e $B = \{x \in \Sigma^* :$ x começa com zero e é seguido de um ou mais 1's$\}$

$AB = ?$ Vamos provar que $AB = C$, onde $C = \{x \in \Sigma^* : |x|_0$ é ímpar e x termina por 1$\}$

(?) $AB \subseteq C$ Seja $w \in AB$. Então, existem x em A e y em B tq $w = xy$. Logo,

$$|w|_0 = |xy|_0 = \underbrace{|x|_0}_{\substack{\text{par} \\ (x \in A)}} + \underbrace{|y|_0}_{\substack{= 1 \\ (y \in B)}} \text{ é ímpar}$$

Além disso, como $w = xy$ e y termina por 1 (pois $y \in B$), segue que w termina por 1.

Portanto, ..., $w \in C$.

(?) $C \subseteq AB$

Seja $w \in C$. Então, $|w|_0$ é ímpar e w termina por 1. Logo, $w = x0y1$, com $x \in \{0, 1\}^*$ e $y \in \{1\}^*$ (supondo a última ocorrência de 0 em w). Então, $|x|_0$ é par e segue que $x \in A$. Além disso, $z = 0_y 1 \in B$. Portanto, $w = xz \in AB$. 4

- <u>Algumas propriedades</u>: $\forall A, B, C \subseteq \Sigma^*$,

a) $(AB)C = A(BC)$ (assoc)

b) $\{\lambda\}A = A\{\lambda\} = A$ ($\{\lambda\}$ é o elemento neutro p/ conc. de ling)

c) $\emptyset A = A\emptyset = \emptyset$ ($\emptyset$ é o elemento zero da concat. de ling)

d) Se $A \subseteq B$ então $CA \subseteq CB$ e $AC \subseteq BC$

e) $\left.\begin{array}{l} A(B \cup C) = AB \cup AC \\ (A \cup B)C = AC \cup BC \end{array}\right\}$ distrib. da concat. em relação à união

f) Seja $\{L_i : i \in I\}$ uma família de ling. indexada por um conj. I, finito ou infinito. Então,

$$A\left(\bigcup_{i \in I} L_i\right) = \bigcup_{i \in I} AL_i \quad \text{e}$$

$$\left(\bigcup_{i \in I} L_i\right)A = \bigcup_{i \in I} L_i A$$

Obs.: A distributividade (à esq ou à dir) da concatenação com relação à intersecção ñ é válida p/ qq ling.

(Exercício: Apresente um exemplo)

e) $A(B \cup C) = AB \cup AC$

($? \subseteq$) $w \in A(B \cup C)$

$w = xy$, $x \in A$ e $y \in B \cup C$

- se $y \in B$ então $w = xy \in AB \subseteq AB \cup AC$
- analogamente se $y \in C$

($? \supseteq$) $AB \cup AC \subseteq A(B \cup C)$?

$$\left.\begin{array}{l} B \subseteq B \cup C \xrightarrow{(d)} AB \subseteq A(B \cup C) \\ C \subseteq B \cup C \xrightarrow[(d)]{} AC \subseteq A(B \cup C) \end{array}\right\rangle \begin{array}{c} AB \cup \\ AC \\ \subseteq (B \cup C) \end{array}$$

3) <u>Potência</u>:

Para $L \subseteq \Sigma^*$ e $n \geq 0$, a n-ésima potência de L, denotada por L^n, é definida por:

$$\begin{cases} L^0 = \{\lambda\} \\ L^n = L^{n-1} L, \text{ p/ } n > 0. \end{cases}$$

<u>Obs</u>.: p/ $n > 0$, $L^n = \{ w \in \Sigma^*$: existe uma fatoração de w com n fatores e cada um dessez fatores pertence a $L \}$

$= \{ w \in \Sigma^* : w = w_1 \ldots w_n$, com $w_i \in L$, p/ $1 \leq i \leq n \}$

<u>Obs.</u>: $\emptyset^0 = \{\lambda\}$ e $\emptyset^n = \emptyset$, p/ $n > 0$

$\{\lambda\}^n = \{\lambda\}$, p/ $n \geq 0$

· <u>Algumas propriedades</u>: $\forall L \subseteq \Sigma^*$, $\forall m, n \geq 0$,

a) $(\{\lambda\} \cup L)^n = \{\lambda\} \cup L \cup L^2 \cup \ldots \cup L^n =$

Ex.: $L = \{a, ab, ba\}$

$L^2 = \{aa, aab, aba, \cancel{aba}, abab, abba, baa, baab, baba\}$

$= (L^n$ se $\lambda \in L)$

b) $L^m L^n = L^{m+n}$

c) $(L^m)^n = L^{m \times n}$

4) Estrela de Kleene: Seja $L \subseteq \Sigma^*$: ~~existe uma fatoração de w com todos os fatores pertencentes a L}~~

$L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n = \{w \in \Sigma^* : w = \lambda$ ou existe uma fatoração de w com todos os fatores pertencentes a $L\} = \{w \in \Sigma^* : w = w_1 \ldots w_n$ p/ algum $n \geq 0$ e $w_i \in L$, p/ $1 \leq i \leq n\}$

<u>Obs</u>: $\emptyset^* = \{\lambda\}$, $\{\lambda\}^* = \{\lambda\}$

$L^+ = \bigcup_{n > 0} L^n = L^* - \{\lambda\}$, se $\lambda \notin L$ ou L^* se $\lambda \in L$

Autômatos

12/8 | 14

Algumas propriedades : $\forall A, B, L \subseteq \Sigma^*$

a) se $A \subseteq B$ então $A^n \subseteq B^n$, p/ todo $n \geq 0$

b) $A \subseteq B$ então $A^* \subseteq B^*$

c) $L^* L^* = L^*$

d) $(L^*)^n = L^*$ p/ todo $n > 0$.

e) $(L^*)^* = L^*$

f) $L^+ = LL^* = L^*L$

g) $L^* = L^+ \cup \{\lambda\}$

c) $L^* L^* = L^*$

(?) $L^* \subseteq L^* L^*$

$L^* = L^* \{\lambda\} \subseteq L^* L^*$

(b) e $\{\lambda\} \subseteq L^*$

(?) $L^* L^* \subseteq L^*$

Seja $w \in L^* L^*$. Então, existem x e y em L^* tq $w = xy$. Ou seja, existem int. m e $n \geq 0$ tq $x \in L^m$ e $y \in L^n$. Logo, $w = xy \in L^m L^n = L^{m+n} \subseteq L^*$. Portanto $w \in L^*$

5) O reverso de uma linguagem $L \subseteq \Sigma^*$, denotado por L^R, é $L^R = \{x^R : x \in L\}$

$= \{x \in \Sigma^* : \text{existem } u \text{ e } v \text{ em } \Sigma^* \text{ tq } uxv \in L\}$

Algumas propriedades: $\forall A, B, L \subseteq \Sigma^*$

a) $(L^R)^R = L$

b) $(AB)^R = B^R A^R$

c) $(A \cup B)^R = A^R \cup B^R$

~~x~~) $(A \cap B)^R = A^R \cap B^R$

d) $(L \cup L^R)^R = L \cup L^R$

e) $\cancel{(\overline{L})^R} = (\overline{L})^R = \overline{(L^R)}$

f) $(L^*)^R = (L^R)^*$

Monitor: rafael
- 3ª 12 às 13
- sala ?

~~IX~~ 6) Prefixo, Sufixo e Fator

$$L \subseteq \Sigma^* \quad \text{Pref}(L) = \bigcup_{x \in L} \text{Pref}(x) =$$

$$= \{x \in \Sigma^* : \text{existe } y \text{ em } \Sigma^* \text{ tq } xy \in L\}$$

$$\text{Suf}(L) = \bigcup_{x \in L} \text{Suf}(x)$$

$$\text{Fat}(L) = \bigcup_{x \in L} \text{Fat}(x) =$$

II) Expressões regulares e linguagens regulares

Seja Σ um alfabeto. Considere o alfabeto $\Gamma = \Sigma \cup \underbrace{\{ (,), \emptyset, +, \cdot, * \}}_{\cap \Sigma = \emptyset}$, onde os novos símbolos não pertecem a Σ.

Uma expressão regular sobre Σ é definida indutivamente por:

(i) $\emptyset$ e σ, p/ cada $\sigma \in \Sigma$, são exp. reg

(ii) se α e β são exp. reg. sobre Σ, então $(\alpha + \beta)$, $(\alpha \cdot \beta)$ e $(\alpha *)$ tbém são exp. reg.

Exemplo: $\Sigma = \{a, b\}$

Algumas exp. reg. sobre Σ:

$\emptyset$; a ; b ; $(a+b)$; $(a \cdot b)$; $(a*)$

$((a*) \cdot (a+b))$; $(((a \cdot (a+b)) \cdot b)*)$; $(\emptyset *)$

Notação: $ER(\Sigma)$: conj de todas as exp. reg sobre Σ

– Para cada α em $ER(\Sigma)$, associamos uma linguagem $L(\alpha) \subseteq \Sigma^*$ da seguinte forma:

$L(\alpha) \subseteq \Sigma^*$ da seguinte forma:

$L(\emptyset) = \emptyset$

$L(\sigma) = \{\sigma\}$, p/ cada $\sigma \in \Sigma$

$L((\beta + \gamma)) = L(\beta) \cup L(\gamma)$, p/ β e γ em $ER(\Sigma)$

$L((\beta \cdot \gamma)) = L(\beta) L(\gamma)$, p/ β e γ em $ER(\Sigma)$

$L((\beta^*)) = (L())^*$, p/ β em $ER(\Sigma)$

Exemplos:

1) $\Sigma = \{a, b\}$ e $\alpha = (((a+b)^*) \cdot a)$

$$
\begin{aligned}
L(\alpha) &= L((((a+b)^*) \cdot a)) \\
&= L(((a+b)^*)) \, L(a) \\
&= (L((a+b)))^* \{a\} \\
&= (L(a) \cup L(b))^* \{a\} \\
&= (\{a\} \cup \{b\})^* \{a\} \\
&= \{a, b\}^* \{a\} = \{x \in \Sigma^* : x \text{ termina por } a\}
\end{aligned}
$$

2) $\Sigma = \{a, b, c\}$

$\alpha = ((c^*) \cdot ((a + (b \cdot (c^*)))^*))$

$L(\alpha) \overset{?}{=} \{x \in \Sigma^* : \text{o fator } ac \text{ não ocorre em } v\} =$

$= \overline{\Sigma^* \{ac\} \Sigma^*}$

$(a + (b + c))$ $a + b + c$

$(a + (b \cdot c))$ $a + bc$

Observações

1) Existe uma precedência sobre os operadores: $*$, $\cdot$, $+$ (maior → menor)

2) Utilizando a associatividade de $+$ e $\cdot$, e obs 1), podemos omitir parêntesis supérfluos e ..

3) Vamos permitir algumas abreviações p/ escrever exp. reg.: λ ao invés de $\emptyset^*$, α^n, p/ $n \geq 1$, ao invés de $\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{n \text{ vezes}}$, p/ $\alpha \in ER(\Sigma)$,

α^+ ao invés de $\alpha \cdot \alpha^*$, p/ $\alpha \in ER(\Sigma)$

Σ ao invés de $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n$ p/ $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$

Dizemos que duas exp. reg α e β são equivalentes ($\alpha \equiv \beta$) se $L(\alpha) = L(\beta)$.

Exemplos: $a + b \equiv b + a$

$110^* + 101^* = 1(10^* + 01^*)$

$(a^3)^* (a^4)^* \equiv \lambda + a^3 + a^4 + a^6 a^*$

p/ todo natural n, $n \geq 6$, existem nat k e l tq $n = 3k + 4l$)

- Algumas propriedades algébricas de exp. reg ($\forall \alpha, \beta, \gamma \in ER(\Sigma)$)

1) $\alpha + \beta \equiv \beta + \alpha$
2) $(\alpha + \beta) + \gamma \equiv \alpha + (\beta + \gamma)$
3) $(\alpha\beta)\gamma \equiv \alpha(\beta\gamma)$
4) $\alpha(\beta + \gamma) \equiv \alpha\beta + \alpha\gamma$
5) $(\alpha + \beta)\gamma \equiv \alpha\gamma + \beta\gamma$
6) $\alpha + \emptyset \equiv \alpha$
7) $\lambda\alpha \equiv \alpha\lambda \equiv \alpha$
8) $\alpha^* \equiv (\alpha + \lambda)^*$
9) $(\alpha^*)^* \equiv \alpha^*$

Escreva exp. reg. p/ as seg. linguagens:

1) Cjto de identificadores (seq de letras ou dígitos, começando por uma letra)

Σ = Letras $\cup$ Dígitos

Letras = {a, ..., z, A, ..., Z}

Dígitos = {0, 1, ..., 9}

α = Letras (Letras + Dígitos)*

2) Conj. dos nºs reais em notação decimal ou exponencial (ex. 123, -123.5, +12E-3, ...)

ex. 123, -123.5, ... 20

$\Sigma = Digito \cup \{+, -, ., E\}$

$Digito = \{0, 1, \dots, 9\}$

$\alpha = (\lambda + + + -)\, Digitos^{+} (\lambda + .\, Digitos^{+}) (\lambda + E (\lambda + + + -)\, Digitos^{+})$

14 / 8 / 8

• Escreva expressões regulares para as seguintes

③ $L = \{x \in \{a,b\}^* : |x|_a \geq 2\}$ $\qquad x \in L \iff |x|_a \geq 2$

$\alpha_1 = (a+b)^* a (a+b)^* a (a+b)^*$ $\qquad \iff x = u a v a w$

$\alpha_2 = b^* a b^* a (a+b)^*$ $\qquad \iff x \in L(\alpha_2)$

$L(\alpha_2) = \{b\}^* \{a\} \{b\}^* \{a\} \{a,b\}^*$

$L \overset{?}{=} L(\alpha_2)$

$x \in L \iff |x|_a \geq 2$

$\iff x = u a v a w$, para u v em $\{b\}^*$ e w em $\{a,b\}^*$

$\iff x \in \{b\}^* \{a\} \{b^*\} \{a\} \{a,b\}^*$

$\iff x \in L(\alpha_2)$

④ $L = \{x \in \{a,b\}^* : 2 \leq |x|_a \leq 3$ e as duas 1^{as} ocorrências de a em x não são consecutivas$\}$

b's a b's a b's
+
b's a b's a b's a b's
⇓
b's a b's a b's (λ, ab's)

$\alpha = b^* a\, b b^* a\, b^* (\lambda + a b^*)$

$L = L(\alpha)$ prove!

⑤ $L = \{x \in \{a,b\}^* :$ toda ocorrência de a em x é seguida por pelo menos uma ocorrência de $b\}$

$\alpha_1 = b^* (abb^*)^*$ $\qquad (b + abb^*)^*$

$\alpha_2 = (b + ab)^*$ $\qquad (b+ab)^*$

$L \overset{?}{=} L(\alpha_1)$ $\qquad L(\alpha_1) = \{b\}^* (\{ab\}\{b\}^*)^*$

(?) $L \subseteq L(\alpha_1)$

Seja $x \in L$. $\qquad \{\lambda\} \subseteq (\{ab\}\{b\}^*)^*$

① $|x|_a = 0$, então $x \in \{b\}^* \subseteq \{b\}^* (\{ab\}\{b^*\})^*$. Logo, $x \in L(\alpha_1)$

$\{b\}^* = \{b\}^* \{\lambda\}$

② $|x|_a = m > 0$, então existem $x_0, x_1, \dots, x_m$ em $\{b\}^*$ tais que

Ela parece aquelas bruxas dos desenho tipo chilius chihiro
só que ela é magra

$x = x_0 ab x_1 ab x_2 - ab x_n$

Como para cada i, $1 \leq i \leq n$, $ab x_i \in \{ab\}\{b\}^*$, segue que $x \in \{b^*\}(\{ab\}\{b\}^*)^n \subseteq \{b\}^*(\{ab\}\{b\}^*)^*$. Logo, $x \in L(\alpha_1)$

(?) $L(\alpha_1) \subseteq L$

Seja $x \in L(\alpha_1)$. Então, existem u em $\{b\}^*$ e v em $(\{ab\}\{b\}^*)^*$ tal que $x = uv$.

① Se $v = \lambda$, então $x = u \in \{b\}^*$. Como $|x|_a = |u|_a = 0$, segue que $x \in L$.

② Se $v \neq \lambda$, então para algum $n > 0$, existem $v_1, \ldots, v_n$ em $\{b\}^*$ tais que $v = abv_1 abv_2 \ldots abv_n$. Logo, $|u|_a = 0$ e $|v|_a = n$ e cada ocorrência de a em v é seguida por uma ocorrência de b. Como $|x|_a = |uv|_a = |u|_a + |v|_a = |v|_a$, segue que cada ocorrência de a em x é seguida por pelo menos uma ocorrência de b. Portanto, $x \in L$.

Uma linguagem sobre Σ é ~~regular~~ se $L = L(\alpha)$ para alguma expressão α sobre Σ

Notação: $Reg(\Sigma)$ é a família de todas linguagens regulares sobre Σ.

O número de operadores de uma expressão regular α sobre Σ, denotado por $nop(\alpha)$, é definido indutivamente por:

(i) $nop(\emptyset) = 0$ e $nop(\sigma) = 0$, para $\sigma \in \Sigma$
Bruno Yoiti Ozahata

(ii) se $\alpha = \beta + \gamma$ ou $\alpha = \beta\gamma$, com β e $\gamma \in ER(\Sigma)$ então nop
$nop(\alpha) = nop(\beta) + nop(\gamma) + 1$
Bruno Yoiti Ozahata

(iii) se $\alpha = \beta^*$, com $\beta \in ER(\Sigma)$, então $nop(\alpha) = nop(\beta) + 1$.

De nada De nada

Uma família F de linguagens sobre Σ é racionalmente fechada se
(i) $\emptyset \in F$
(ii) se A e B $\in F$ então $A \cup B$, AB e $A^* \in F$

Proposição 1: $Reg(\Sigma)$ é racionalmente fechada

Prova: (i) $\emptyset = L(\emptyset)$; logo, $\emptyset \in Reg(\Sigma)$

(ii) Sejam A e B em $Reg(\Sigma)$.

Então, existem expressões regulares α e β sobre Σ tal que $A = L(\alpha)$ e $B = L(\beta)$.

Logo, $A \cup B = L(\alpha) \cup L(\beta) = L(\alpha + \beta)$,

$AB = L(\alpha).L(\beta) = L(\alpha\beta)$ e

$A^* = (L(\alpha))^* = L(\alpha^*)$

Portanto, $A \cup B$, AB e $A^* \in Reg(\Sigma)$

observação: Para todo σ em Σ, $\{\sigma\} \in Reg(\Sigma)$ $(\{\sigma\} = L(\sigma))$

Algumas questões!

① $Reg(\Sigma)$ é fechada por intersecção e complemento

② É possível verificar se quaisquer duas expressões regulares são equivalentes?

③ Qualquer linguagem pode ser descrita por uma expressão regular?

④ Dadas uma palavra x e uma expressão regular α, é possível verificar se $x \in L(\alpha)$?

19 / 8 / 8

Proposição 2: $Reg(\Sigma)$ é fechada por reverso.

O reverso de uma expressão regular α sobre Σ, denotado por α^R, é definido indutivamente por:

$L(\beta\gamma)^R = (L(\beta)\,L(\gamma))^R$

$L(\gamma)^R\,L(\beta)^R$

i) $\emptyset^R = \emptyset$

ii) $\sigma^R = \sigma$, para $\sigma \in \Sigma$

iii) para β e γ em $ER(\Sigma)$

$(\beta + \gamma)^R = \beta^R + \gamma^R$

$(\beta\gamma)^R = \gamma^R \beta^R$

$(\beta^*)^R = (\beta^R)^*$

α	α^R
$\emptyset$	$\emptyset$
σ	σ
$(\beta+\gamma)$	$\beta^R+\gamma^R$
$(\beta\gamma)$	$\gamma^R\beta^R$
β^*	$(\beta^R)^*$

Observação: Pela definição acima, se $\alpha \in ER(\Sigma)$, então α^R também é uma expressão regular sobre Σ

Exemplo: $\alpha = (b + (abb^*)^*)$

$\alpha^R = (b + (abb^*)^*)^R = b^R + ((abb^*)^*)^R = b + ((abb^*)^R)^* = b + ((b^*)^R(ab)^R)^* =$

$b + ((b^R)^*\,(b^R a^R))^* = b + (b^* b a)^*$

Proposição 3: Seja α em $ER(\Sigma)$. Então, $(L(\alpha))^R = L(\alpha^R)$

Prova

Por indução no $nop(\alpha)$

Base: $nop(\alpha) = 0$; então $\alpha = \emptyset$ ou $\alpha = \sigma$, para $\sigma \in \Sigma$

$\alpha = \emptyset$: $(L(\alpha))^R = (L(\emptyset))^R = \emptyset^R = \emptyset = L(\emptyset) = L(\emptyset^R) = L(\alpha^R)$

$\alpha = \sigma$: $(L(\alpha))^R = (L(\sigma))^R = \{\sigma\}^R = \{\sigma\} = L(\sigma) = L(\sigma^R) = L(\alpha^R)$

Seja $n \geq 0$. HI: Suponha que se $\alpha \in ER(\Sigma)$ e $nop(\alpha) \leq n$, então $(L(\alpha))^R = L(\alpha^R)$

Passo: Seja $\alpha \in ER(\Sigma)$, com $nop(\alpha) = n+1$. Então, existem β e $\gamma \in ER(\Sigma)$, com $nop(\beta) \leq n$ e $nop(\gamma) \leq n$, tal que $\alpha = (\beta + \gamma)$ ou $\alpha = (\beta\gamma)$ ou $\alpha = (\beta^*)$

$\rightarrow \alpha = (\beta + \gamma)$: $(L(\alpha))^R = (L(\beta+\gamma))^R$

definição de linguagem associada à exp regular $= (L(\beta) \cup L(\gamma))^R$

$\forall A, B \subseteq \Sigma^*$ $(A \cup B)^R = A^R \cup B^R$ (provar) $= (L(\beta))^R \cup (L(\gamma))^R$

HI $= L(\beta^R) \cup L(\gamma^R)$

definição de linguagem associada à exp regular $= L(\beta^R + \gamma^R)$

definição do reverso de expressão regular $= L((\beta + \gamma)^R)$

$= L(\alpha^R)$

$\rightarrow \alpha = (\beta\gamma)$ ...

$\rightarrow \alpha = (\beta^*)$ ...

Proposição 2: $Reg(\Sigma)$ é fechada por reverso

Prova: Seja $L \in Reg(\Sigma)$

Então, $L = L(\alpha)$ para alguma expressão regular α sobre Σ. Logo,

$L^R = (L(\alpha))^R = L(\alpha^R)$. Como α^R é uma expressão regular segue que $L^R \in Reg(\Sigma)$

proposição 3.

Expressões Regulares Práticas (Grep, Flex, Perl)

Práticas	Teóricas
$\alpha ?$	$(\alpha + \lambda)$
$\alpha \{n\}$	α^n
$\alpha \{n,\}$ pelo menos n ocorrências de α	$\alpha^n \alpha^*$
$\alpha \{,m\}$	$(\lambda + \alpha + \dots + \alpha^m)$
$\alpha \{n,m\}$	$\alpha^n + \alpha^{n+1} + \dots + \alpha^m$
$[\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3]$	$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$
$[\hat{} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3]$	$\sigma_4 + \sigma_5 + \dots + \sigma_k$ (se $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$)
$\alpha \| \beta$	$\alpha + \beta$
α_{br} br: back referencia	?
$\cdot$	Σ
α^*	α^*
α^+	α^+

III) Autômatos Finitos e Determinísticos

Um autômato finito determinístico (a.f.d.) é uma quíntupla $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, onde:

Q é um conjunto finito, não-vazio de *estados*;

Σ é um alfabeto (alfabeto de entrada);

$s \in Q$ é o *estado inicial*;

$F \subseteq Q$ é o conjunto de *estados finais* e

$\delta : Q \times \Sigma \to Q$ é a *função de transição* (ou função-programa)

Observação: Sob o ponto de vista computacional, um autômato finito é um dispositivo que reconhece linguagens fita (de entrada) | σ_1 | σ_2 | σ_3 | σ_4 | σ_5 | | | |

cabeça de leitura

controle finito | $q_0, q_1, \ldots, q_n$ estados

Um algoritmo para um a.f.d. $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$: (Suponha que a entrada (uma palavra de Σ^*) esteja armazenada na fita):

$q \leftarrow s$ // começa no estado inicial
enquanto (não leu toda a entrada) faça
  $\sigma \leftarrow$ leia o próximo símbolo da entrada;
  $q \leftarrow \delta(q, \sigma)$;
se ($q \in F$) então aceita a entrada;
  senão rejeita a entrada.

Exemplo: a.f.d $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, onde $Q = \{q_0, q_1\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $s = q_0$, $F = \{q_0\}$ e a tabela de transição para δ:

Estados	símbolo a	símbolo b
q_0	q_0	q_1
q_1	q_1	q_0

Uma *configuração* (ou descrição instantânea) de um a.f.d. $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ é um par

(q, x), $q \in Q$ e $x \in \Sigma^*$

q: estado atual; x: parte não lida da entrada

Exemplo: Configuração atual: $(p, \sigma_k \sigma_{k+1} \ldots \sigma_m)$ e $\delta(p, \sigma_k) = q$

seguinte: $(q, \sigma_{k+1} \ldots \sigma_m)$

A *relação* $\vdash_{\mathcal{A}}$ sobre o conjunto de configurações ($Q \times \Sigma^*$) de $\mathcal{A}$ representa um movimento de $\mathcal{A}$, e é definida por:

$\forall q \in Q, \forall \sigma \in \Sigma, \forall x \in \Sigma^*, (q, \sigma x) \vdash_{\mathcal{A}} (\delta(q, \sigma), x)$, ou

"produz em um passo"

spiral

/ /

equivalentemente, $\forall\, p, q \in Q$, $\forall\, x, y \in \Sigma^*$,

$(p, x) \vdash_{A} (q, y) \iff \exists\, \sigma \in \Sigma$ tal que $x = \sigma y$ e $\delta(p, \sigma) = q$.

Observações:

① $\vdash_{A}$ é uma função de $Q \times \Sigma^+$ em $Q \times \Sigma^*$

② A configuração (q, λ), $\forall\, q \in Q$, indica que já foi lida toda a entrada.

Exemplo: $(q_0, abba) \vdash_{A} (q_0, bba)$

$\vdash_{A} (q_1, ba)$

$\vdash_{A} (q_0, a)$

$\vdash_{A} (q_0, \lambda)$

abba é aceita por A

21 / 8 / 8

O fecho reflexivo e transitivo de $\vdash_{\mathcal{A}}$, denotado por $\vdash^*_{\mathcal{A}}$, é tal que $(p,x) \vdash^*_{\mathcal{A}} (q,y)$ em $k \geq 0$ passos se e somente se existe uma sequência de $k+1$ configurações $(p_0,x_0)=(p,x), (p_1,x_1), \dots, (p_k,x_k)=(q,y)$ tal que $\forall i,\ 1 \leq i \leq k,\ (p_{i-1},x_{i-1}) \vdash_{\mathcal{A}} (p_i,x_i)$.

"produz"

Uma palavra $x \in \Sigma^*$ é aceita por um a.f.d. $\mathcal{A}=(Q,\Sigma,\delta,s,F)$ se $(s,x) \vdash^*_{\mathcal{A}} (q,\lambda)$, para algum $q \in F$. Caso contrário, $\mathcal{A}$ rejeita x.

A linguagem aceita (ou reconhecida) por $\mathcal{A}$ é

$L(\mathcal{A}) = \{x \in \Sigma^* : x \text{ é aceita por } \mathcal{A}\} = \{x \in \Sigma^* : (s,x) \vdash^*_{\mathcal{A}} (q,\lambda) \text{ para algum } q \in F\}$

Uma linguagem $L \subseteq \Sigma^*$ é reconhecível se existe um afd $\mathcal{A}$ tal que $L = L(\mathcal{A})$

Notação: $Rec(\Sigma)$ é a família de todas as linguagens reconhecíveis sobre Σ

Seja $\mathcal{A}=(Q,\Sigma,\delta,s,F)$ um a.f.d. Vamos extender a função de transição $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ para uma função $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$ da seguinte forma:

$$\hat{\delta}(q,\lambda) = q \quad \text{para todo } q \in Q$$
$$\hat{\delta}(q,x\sigma) = \delta(\hat{\delta}(q,x),\sigma),\ \forall q \in Q,\ \forall x \in \Sigma^*,\ \forall \sigma \in \Sigma$$

Exemplo: $\hat{\delta}(q_0, abba) = \delta(\hat{\delta}(q_0,abb),a)$

afd $\mathcal{A}=(Q,\Sigma,\delta,s,F)$ $\quad = \delta(\delta(\hat{\delta}(q_0,ab),b),a)$

$Q=\{q_0,q_1\}$, $\Sigma=\{a,b\}$, $\quad = \delta(\delta(\delta(\hat{\delta}(q_0,a),b),b),a)$

$s=q_0$, $F=\{q_0\}$ $\quad = \delta(\delta(\delta(\delta(\hat{\delta}(q_0,\lambda),a),b),b),a) = q_0$

δ Estados \ Símbolos	a	b
q_0	q_0	q_1
q_1	q_1	q_0

Observações:

① $\hat{\delta}$ coincide com δ em Σ

② Vamos escrever δ ao invés de $\hat{\delta}$

spiral

Prova

① $\forall q \in Q, \forall \sigma \in \Sigma$

$$\hat{\delta}(q,\sigma) = \hat{\delta}(q,\lambda\sigma) \overset{\text{def } \hat{\delta}}{=} \delta(\hat{\delta}(q,\lambda),\sigma) \overset{\text{def } \delta}{=} \delta(q,\sigma)$$

Proposição 1: Seja $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ a.f.d. $\forall q \in Q, \forall x, y \in \Sigma^*$

$$\delta(q, xy) = \delta(\delta(q,x), y)$$

Prova: indução no $|y|$

Proposição 2: Seja $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ uma a.f.d. $\forall p, q \in Q, \forall x, y \in \Sigma^*$

$(p, xy) \vdash_A^* (q, y)$ se e somente se $\delta(p, x) = q$

Prova

($\Rightarrow$) (?) $\forall p, q \in Q, \forall x, y \in \Sigma^*$, se $(p, xy) \vdash_A^* (q, y)$ em $n \geq 0$ passos então $\delta(p, x) = q$

(Prove por indução em n.)

($\Leftarrow$) (?) $\forall p, q \in Q, \forall x \in \Sigma^*$, se $\delta(p,x) = q$, então $\forall y \in \Sigma^*$, $(p, xy) \vdash_A^* (q, y)$

(Prove por indução no $|x|$)

Corolário 3: Seja $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ um a.f.d. Então, $L(A) = \{x \in \Sigma^* : \delta(s,x) \in F\}$

Prova

$L(A) = \{x \in \Sigma^* : x$ é aceita por $A\}$

$= \{x \in \Sigma^* : (s, x) \vdash_A^* (q, \lambda)$, para algum $q \in F\}$

$\overset{\text{proposição 2}}{=} \{x \in \Sigma^* : \delta(s,x) = q$, para algum $q \in F\}$

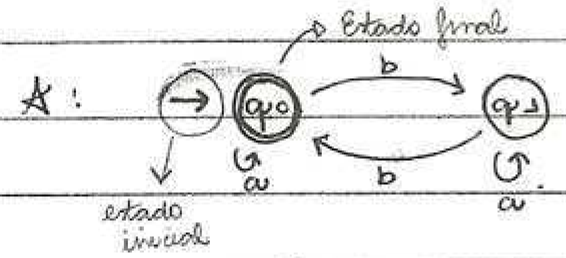
$= \{x \in \Sigma^* : \delta(s,x) \in F\}$

spiral

O *grafo* de um afd $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, denotado por $G(A)$ é o grafo orientado e rotulado com:

- $VG = Q$
- $aG = \{(p, \sigma, q) : p, q \in Q, \sigma \in \Sigma$ e $\delta(p, \sigma) = q\}$

Exemplo:



Um *passeio* em $G(A)$ é uma sequência de $n \geq 0$ arestas consecutivas $P = (p_0, \sigma_1, p_1)(p_1, \sigma_2, p_2) \dots (p_{n-1}, \sigma_n, p_n)$ com

- comprimento $|P| = n$.
- origem p_0
- término p_n
- rótulo $\|P\| = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$

Notação simplificada: $P : p_0 \overset{x}{\leadsto} p_n$, onde $x = \sigma_1 \dots \sigma_n$ (dizemos que P soletra x)

Observação: Um passeio de comprimento zero, chamado de *passeio trivial*, é um passeio com origem e término igual a q, $\forall q \in Q$, e rótulo λ.

Sejam $P = (p_0, \sigma_1, p_1) \dots (p_{n-1}, \sigma_n, p_n)$ e $Q = (q_0, \tau_1, q_1) \dots (q_{m-1}, \tau_m, q_m)$ dois passeios em $G(A)$, com $q_0 = p_n$. A *concatenação* dos passeios P e Q é o passeio $PQ = (p_0, \sigma, p_1) \dots (p_{n-1}, \sigma_n, p_n)(q_0, \tau_1, q_1) \dots (q_{m-1}, \tau_m, q_m)$ com $|PQ| = |P| + |Q| = n + m$ e $\|PQ\| = \|P\| \|Q\| = \sigma_1 \dots \sigma_n \tau_1 \dots \tau_m$

Proposição 4: Seja $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ uma a.f.d. $\forall p, q \in Q, \forall x \in \Sigma^*$ existe em $G(A)$ um passeio $P : p \overset{x}{\leadsto} q$ se e somente se $\delta(p, x) = q$

Prova: ($\Rightarrow$) indução no $|P|$

($\Leftarrow$) indução no $|x|$

spiral

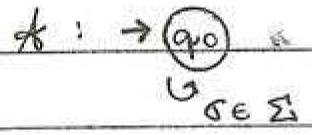
Corolário 5: Seja $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ um a.f.d.. Então,

$L(\mathcal{A}) = \{x \in \Sigma^* :$ existe em $G(\mathcal{A})$ um passeio $P: s \overset{x}{\mapsto} q$, para algum $q \in F\}$

Prova: Segue do Corolário 3 e da Proposição 4.

Alguns exemplos de linguagens reconhecíveis

① $\emptyset$

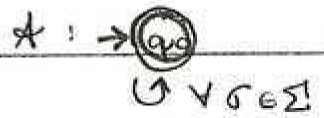


$\forall x \in \Sigma^*$, $\delta(q_0, x) = q_0 \notin F$.

Logo, $\forall x \in \Sigma^*$, $x \notin L(\mathcal{A})$.

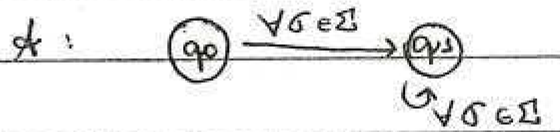
Portanto, $L(\mathcal{A}) = \emptyset$

② Σ^*



③ $\{\lambda\}$

$\delta(q_0, \lambda) = q_0 \in F \therefore \lambda \in L(\mathcal{A})$



Seja $x \in \Sigma^*$, $x \neq \lambda$

Então, $x = \sigma y$, para $\sigma \in \Sigma$ e $y \in \Sigma^*$

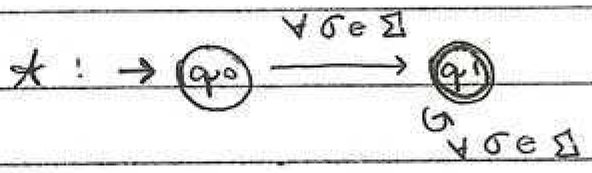
Logo, $\delta(q_0, x) = \delta(q_0, \sigma y)$

$= \delta(\delta(q_0, \sigma), y)$

$= \delta(q_1, y) = q_1 \notin F$

$\therefore \forall x \in \Sigma^+$, $x \notin L(\mathcal{A})$

④ $\Sigma^+ = \Sigma^* - \{\lambda\}$



spiral

Alguns Exemplos de Linguagens Reconhecíveis

① $\emptyset = L$

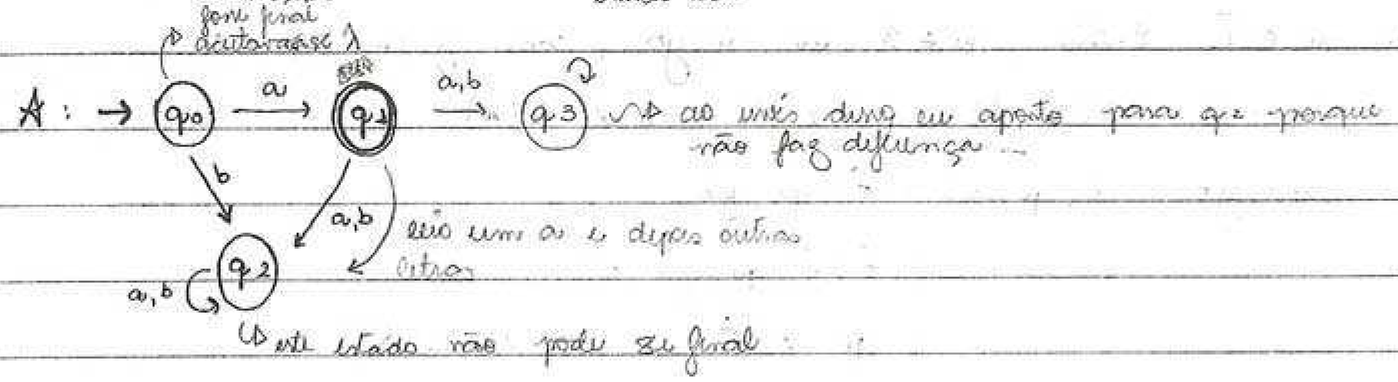
② $\Sigma^* = L$

③ $\{\lambda\} = L$

④ $\Sigma^+ = L$

⑤ $\{a\}$, onde $\Sigma = \{a,b\} = L$ — Para cada letra do alfabeto se diz para qual estado vai

Prova:

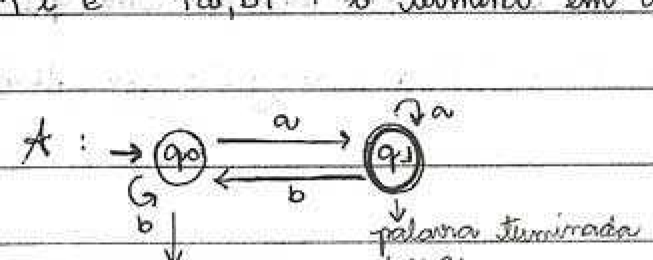


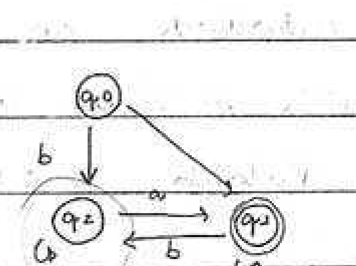
- $\delta(q_0, \lambda) = q_0 \notin F \Rightarrow \lambda \notin L(A)$
- $\delta(q_0, a) = q_1 \in F \Rightarrow a \in L(A)$
- $\delta(q_0, b) = q_2 \notin F \Rightarrow b \notin L(A)$
- $x \in \Sigma^*$ tal que $|x| \geq 2$ Então $x = \sigma_1\sigma_2 y$, para σ_1 e σ_2 em Σ e y em Σ^*

$\delta(q_0, x) = \delta(q_0\sigma_1\sigma_2 y) = \delta(\delta(q_0\sigma_1\sigma_2), y) = \delta(q_2, y) = q_2 \notin F$

Logo, $\forall\, x \in \Sigma^*$, com $|x| \geq 2$, $x \notin L(A)$

⑥ $\{x \in \{a,b\}^* \mid x$ termina em $a\} = L$





Prova = $L \overset{?}{=} L(A)$

(?) $L \subseteq L(\mathcal{A})$

Seja $x \in L$. Então $x = ya$, com $y \in \{a,b\}^*$. Logo,

$\delta(q_0, x) = \delta(q_0, ya)$

$= \delta(\underbrace{\delta(q_0, y)}_{\in \{q_0, q_1\}}, a)$

$= q_1 \in F$ ⇒ é possível fazer isso porque somente

Portanto, $x \in L(\mathcal{A})$ olhando o autômato é fácil de enxergar

(?) $L(\mathcal{A}) \subseteq L$ $\left(\equiv \overline{L} \subseteq \overline{L(\mathcal{A})}\right)$ ⇝ $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$

Seja $x \in \overline{L}$. Então, $x = \lambda$ ou $x = yb$, com y em $\{a,b\}^*$

$x = \lambda$: $\delta(q_0, \lambda) = q_0 \notin F \Rightarrow \lambda \notin L(\mathcal{A})$

$x = yb$: $\delta(q_0, x) = \delta(q_0, yb)$

$= \delta(\underbrace{\delta(q_0, y)}_{\in \{q_0, q_1\}}, b)$

$= q_0 \notin F \therefore x \notin L(\mathcal{A})$

Outra Prova:

estados $q_0 \neq q_1$: então o passeio é maior do que zero $q_0 \vdash^{n} (r) \xrightarrow{\sigma} q_1 \Rightarrow x = y\sigma$

estado qualquer q_0 ou q_1 ⇒ se q_1 ⇒ termina por a

(?) $L(\mathcal{A}) \subseteq L$

Seja $x \in L(\mathcal{A})$. Então existe um passeio $P: q_0 \vdash^{x} q_1$. Como $q_0 \neq q_1$, temos que $|P| > 0$. Logo, podemos fatorar o passeio P da seguinte forma:

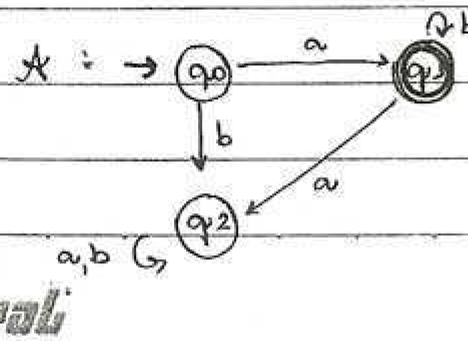
$P: q_0 \vdash^{y} r \xrightarrow{\sigma} q_1$, para algum $r \in \{q_0, q_1\}$, $y \in \{a,b\}^*$, $\sigma \in \Sigma$ tal que $x = y\sigma$.

Por construção do autômato $\mathcal{A}$, todas arestas com término em q_1 têm como rótulo o símbolo a. Segue então que $\sigma = a$. Logo, $x = y\sigma = ya$ termina por a. Portanto, $x \in L$.

(7) $\{ab^n, n \geq 0\} = L$

$L \subseteq L(\mathcal{A})$?

$\overline{L} \subseteq \overline{L(\mathcal{A})}$?



$x \in L$, então $x = \lambda$ ou

$x = by$, $y \in \{a,b\}^*$ ou

$x = ay$, $y \in \{a,b\}^*$, com $|y|_a > 0$

/ /

(8) $\{x \in \{a,b\}^* : |x|_a = 1\} = L$

$L \overset{?}{=} L(A)$

(?) $L \subseteq L(A)$

A :

$x \in L$

$x = uav$, $u, v \in \{b\}^*$

Em termos de passeio: $x \in L(A)$

(?) $\overline{L} \subseteq \overline{L(A)}$

p : $q_0 \overset{x}{\leadsto} q_1$

$x \in \overline{L}$

p : $q_0 \overset{u}{\leadsto} q_0 \xrightarrow{a} q_1 \overset{v}{\leadsto} q_1$

só pode terminar assim

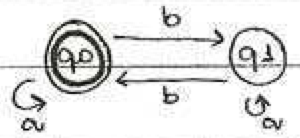
$|x|_a = 0$ ou $|x|_a \geq 2$

$x \in \{b\}^*$ $\quad$ $x = uavaw$ (u e $v = b^*$ e $w \in \{a,b\}^*$)

u e v então tem que estar em $\{b\}^*$

(9) $\{x \in \{a,b\}^* : |x|_b$ é par $\} = L$

A :



zero é par...

$L \overset{?}{=} L(A)$

$\delta(q_0, x) = q_0$, se $|x|_b$ é par

q_1 , se $|x|_b$ é impar

$\Downarrow$

$q_{|x|_b \bmod 2}$

Propriedade: $\forall x \in \{a,b\}^*$, $\delta(q_0, x) = q_{|x|_b \bmod 2}$

Prova por indução no $|x|$

→ Base: $|x| = 0$: então $x = \lambda$. Logo, $\delta(q_0, x) = \delta(q_0, \lambda) = q_0$

$q_0 = q_{|\lambda|_b \bmod 2}$

Seja $n \geq 0$

→ HI: Suponha que $\forall x \in \{a,b\}^*$, com $|x| \leq n$, $\delta(q_0, x) = q_{|x|_b \bmod 2}$

→ Passo: Seja $x \in \{a,b\}^*$, com $|x| = n+1$. Então $x = y\sigma$, para $\sigma \in \{a,b\}$ e $y \in \{a,b\}^*$

$\delta(q_0, x) = \delta(q_0, y\sigma) = \delta(\delta(q_0, y), \sigma)$.

Como $|y| = n$, pela HI temos $\delta(q_0, y) = q_{|y|_b \bmod 2}$.

Logo, $\delta(q_0, x) = \delta(q_{|y|_b \bmod 2}, \sigma)$. $\quad$ se $\sigma = a$ $\quad$ $\delta(q_0, x) = q_{|y|_b \bmod 2}$

se $\sigma = b$ $\quad$ $\delta(q_0, x) = q_{(|y|_b + 1) \bmod 2}$

Mas $x = \sigma y$. Então: $|x|_b = \begin{cases} |y|_b, & \text{se } \sigma = a \\ |y|_b + 1 & \text{se } \sigma = b \end{cases}$. Portanto, $\delta(q_0, x) = q_{|x|_b \bmod 2}$ $\blacksquare$

spiral

Seja $x \in \{a,b\}^*$, $x \in L \Leftrightarrow |x|_b$ é par

$\Leftrightarrow |x|_b \bmod 2 = 0$

$\Leftrightarrow \delta(q_0, x) = q_0$

$\Leftrightarrow x \in L(A)$

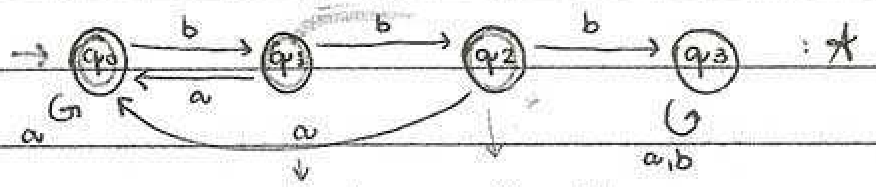
spiral

28 / 8 / 8

1º exercício

Escreva expressões regulares para cada uma das linguagens nos Exemplos 1 a 10
de linguagem reconhecíveis

(10) $L = \{x \in \{a,b\}^* : bbb$ não é fator de $x\}$



a   ab ou b   abb ou bb

Propriedades:

(1) $\forall x \in \{a,b\}^*$

$\delta(q_0, x) = q_3$ se e somente se x tem fator bbb

(2) $\forall x \in \{a,b\}^*$

$\delta(q_0, x) = q_i$, $i \in \{0,1,2\}$ se e somente se $x = b^i$ ou $x = y a b^i$, para $y \in \{a,b\}^*$ e y não tem fator bbb

⇓ se eu provar as propriedades provo $L \stackrel{?}{=} L(A)$

(?) $\overline{L} \subseteq \overline{L(A)}$

Seja $x \in \overline{L}$. Então x tem fator bbb; ou seja, $x = u\,bbb\,\sigma$, para u e σ em $\{a,b\}^*$.

Logo, $\delta(q_0, x) = \delta(q_0, u\,bbb\,\sigma) = \delta(\underbrace{\delta(q_0, u)}_{\in \{q_0,q_1,q_2,q_3\} = p}, bbb\,\sigma)$

$= \delta(\delta(p, bbb), \sigma)$

por construção do autômato A

$= \delta(q_3, \sigma) = q_3 \notin F$

Portanto, $x \notin L(A)$

(?) $L \subseteq L(A)$

Vamos provar que $\forall x \in \{a,b\}^*$, se $x \in L$ então $x \in L(A)$, por indução no $|x|$

Base: $|x| = 0$, então $x = \lambda$. Logo, $\delta(q_0, x) = \delta(q_0, \lambda) = q_0 \in F$. Portanto, $\lambda \in L(A)$.

Seja $n \geq 0$. HI: Suponha que $\forall x \in \{a,b\}^*$, se $x \in L$ e $|x| \leq n$, então $x \in L(A)$.

Passo: Seja $x \in \{a,b\}^*$, com $|x| = n+1$. Então, $x = y\sigma$, para $\sigma \in \Sigma$ e $y \in \{a,b\}^*$

Suponha que $x \in L$, x não tem fator bbb. Logo, y não pode ter fator bbb, e segue que $y \in L$.

Como $|y| = n$ e $y \in L$, pela HI resulta que $y \in L(A)$. Logo,

$\delta(q_0, y) \in F = \{q_0, q_1, q_2\}$

→ se $\delta(q_0, y) = q_0$, então

$\delta(q_0, x) = \delta(q_0, y\sigma) = \delta(\delta(q_0, y)\sigma) = \delta(q_0, \sigma) \in \{q_0, q_1\} \subseteq F$. Logo, $x \in L(A)$

→ se $\delta(q_0, y) = q_1$, então

$\delta(q_0, x) = \delta(q_0, y\sigma) = \delta(\delta(q_0, y), \sigma) = \delta(q_1, \sigma) \in \{q_0, q_2\} \subseteq F$. Logo, $x \in L(A)$

→ se $\delta(q_0, y) = q_2$, então por construção de A, segue que $y = ubb$ p/ alguma palavra u em $\{a,b\}^*$.

u ñ tem bbb pq $y \in L$

$\delta(q_0, x) = \delta(q_0, y\sigma) = \delta(\delta(q_0, y), \sigma) = \delta(q_2, \sigma)$

Como $x = y\sigma = ubb$ e x não tem fator bbb, segue que $\sigma = a$ e $\delta(q_2, \sigma) = \delta(q_2, a) = q_0 \in F$.

Logo, $x \in L(A)$.

Dois a.f.d A e B são *equivalentes* se $L(A) = L(B)$.

Teorema de Kleene (1956): $Rec(\Sigma) = Reg(\Sigma)$

Prova: $Reg(\Sigma) \subseteq Rec(\Sigma)$: algoritmo que dada uma expressão regular α sobre Σ, constrói um afd A tal que $L(A) = L(\alpha)$.

$Rec(\Sigma) \subseteq Reg(\Sigma)$: algoritmo que dado um afd A, determina uma exp. reg. α tal que $L(\alpha) = L(A)$

$\cup$ · $*$

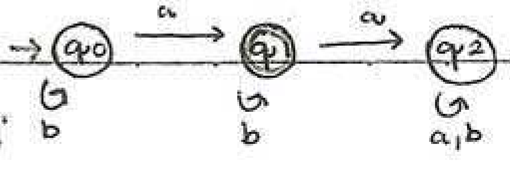
Reg é fechado p/ inverso

$\cap$? complemento?

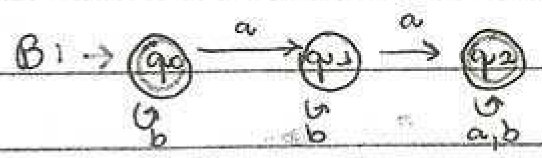
Operações Booleanas com linguagens reconhecíveis: (união, intersecção, complemento, diferença, diferença simétrica)

Exemplo: $\Sigma = \{a, b\}$ $\quad L = \{x \in \Sigma^* : |x|_a = 1\} = L(A)$

A:



Será que $\bar{L}$ é reconhecível?



$L(B) = \bar{L}$

Lema 6: $Rec(\Sigma)$ é fechado por complemento.

Prova

Seja $L \in Rec(\Sigma)$. Então, existe um a.f.d. $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ tal que $L(A) = L$. Considere o a.f.d $B = (Q, \Sigma, \delta, s, Q-F)$.

Seja $x \in \Sigma^*$.

$x \in L(B)$ se e somente se $\delta(s, x) \in Q-F$.

se e somente se $\delta(s, x) \notin F$

se e somente se $x \notin L(A)$

se e somente se $x \notin L$

se e somente se $x \in \bar{L}$ $\therefore$ $\bar{L} \in Rec(\Sigma)$

Exemplo: $\Sigma = \{a, b\}$ $L = \{x \in \Sigma^* : |x|_a$ é par e $|x|_b$ é ímpar$\}$

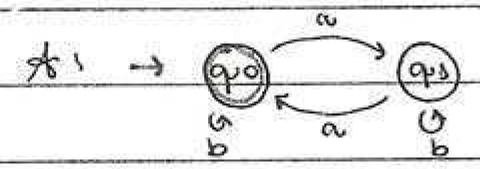
Será que L é reconhecível?

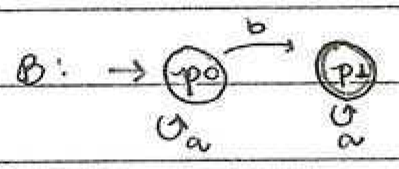
Considere as linguagens $L_1 = \{x \in \Sigma^* : |x|_a$ é par$\} = L(A)$

$L_2 = \{x \in \Sigma^* : |x|_b$ é ímpar$\} = L(B)$

$L = L_1 \cap L_2$

Será que $L_1 \cap L_2$ é reconhecível?





ñ importa estado final ou inicial

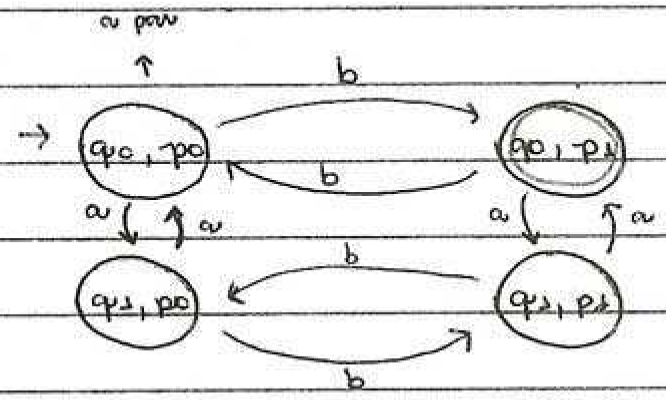
O produto direto de dois semi-autômatos $A = (Q_A, \Sigma, \delta_A)$ e $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B)$ é o semi-autômato $A \times B = (Q_A \times Q_B, \Sigma, \delta)$, onde $\forall p \in Q_A$, $\forall q \in Q_B$, $\forall \sigma \in \Sigma$, $\delta((p,q),\sigma) = (\delta_A(p,\sigma), \delta_B(q,\sigma))$

Podemos estender δ para $\hat{\delta} : (Q_A \times Q_B) \times \Sigma^* \to (Q_A \times Q_B)$ da seguinte forma:

- $\hat{\delta}((p,q),\lambda) = (p,q)$, $\forall p \in Q_A$, $\forall q \in Q_B$ e
- $\hat{\delta}((p,q),x\sigma) = \delta(\hat{\delta}((p,q),x),\sigma)$, $\forall p \in Q_A$, $\forall q \in Q_B$, $\forall x \in \Sigma^*$, $\forall \sigma \in \Sigma$

Proposição 7: $\forall x \in \Sigma^*$, $\forall (p,q) \in Q_A \times Q_B$, $\hat{\delta}((p,q),x) = (\hat{\delta}_A(p,x), \hat{\delta}_B(q,x))$.

Prova: prove por indução no $|x|$



2 / 9 / 8

Produto Direto

$\mathcal{A} = (Q_A, \Sigma, \delta_A)$ e $\mathcal{B} = (Q_B, \Sigma, \delta_B)$

$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = (Q_A \times Q_B, \Sigma, \delta)$, $\delta : (Q_A \times Q_B) \times \Sigma \to Q_A \times Q_B$

$\delta((p,q), \sigma) = (\delta_A(p,\sigma), \delta_B(q,\sigma))$ → andar nos dois autômatos ao mesmo tempo

$\hat{\delta}((p,q), x) = (\hat{\delta}_A(p,x), \hat{\delta}_B(q,x))$

Lema 8: $Rec(\Sigma)$ é fechada por intersecção

Prova: Sejam L_1 e $L_2 \in Rec(\Sigma)$

Então existem afd $\mathcal{A} = (Q_A, \Sigma, \delta_A, s_A, F_A)$ e $\mathcal{B} = (Q_B, \Sigma, \delta_B, s_B, F_B)$ tais que $L_1 = L(\mathcal{A})$ e $L_2 = L(\mathcal{B})$

Considere o afd $\mathcal{C} = (Q_A \times Q_B, \Sigma, \delta, (s_A, s_B), F_A \times F_B)$, onde δ é a função de transição do produto direto dos semi-autômatos correspondentes aos autômatos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Vamos provar que: $L(\mathcal{C}) = L_1 \cap L_2$

Seja $x \in \Sigma^*$, $x \in L(\mathcal{C}) \Leftrightarrow \delta((s_A, s_B), x) \in F_A \times F_B$

$\overset{\text{Prop 7}}{\Leftrightarrow} (\delta_A(s_A, x), \delta_B(s_B, x)) \in F_A \times F_B$

$\Leftrightarrow \delta_A(s_A, x) \in F_A$ e $\delta_B(s_B, x) \in F_B$

$\Leftrightarrow x \in L(\mathcal{A})$ e $x \in L(\mathcal{B})$

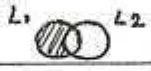
$\Leftrightarrow x \in L_1$ e $x \in L_2$

$\Leftrightarrow x \in L_1 \cap L_2$ ∴ $L_1 \cap L_2 \in Rec(\Sigma)$.

Lema 9: $Rec(\Sigma)$ é fechada por união, diferença e diferença simétrica

Prova: L_1 e $L_2 \in Rec(\Sigma)$

(I) $L_1 \cup L_2 = \overline{(\overline{L_1} \cap \overline{L_2})}$ 

(II) $L_1 - L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$ 

$L_1 \Delta L_2 = (L_1 \cup L_2) - (L_1 \cap L_2) = (L_1 - L_2) \cup (L_2 - L_1)$ 

Como $Rec(\Sigma)$ é fechado para $\cap$ e complemento, também é fechado para $\cup$ (I) e para diferença (II) e finalmente para Δ.

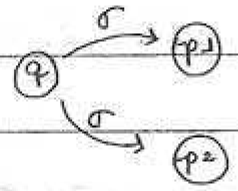
IV) Autômatos finitos não-determinísticos

É uma quíntupla $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ onde:

- Q é um conjunto não-vazio de *estados*,
- Σ é um *alfabeto* (de entrada),
- $s \in Q$ é o *estado inicial*,
- $F \subseteq Q$ é o conjunto de *estados finais* e
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \to 2^{Q}$ é a função de transição

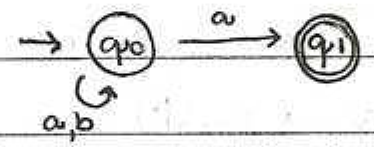
Podemos ter:


não há transição de q com o rótulo σ

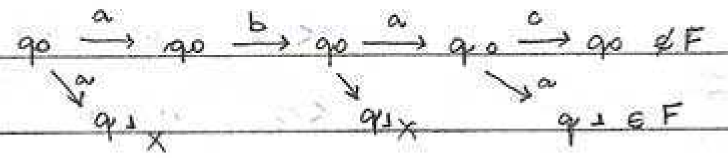

tem + de uma transição de q com rótulo σ


tem transição rotulada com λ

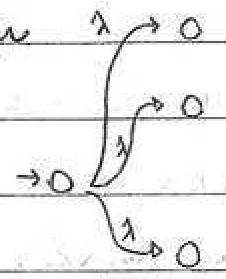
exemplo 1: $L = \{x \in \{a,b\}^* : x \text{ termina por } a\}$

A : 

simulando com $x = abaa$



x é aceita por A porque existe uma sequência de movimentos que leva do estado inicial para algum estado final e que lê a palavra x todinha.

Observação: Definir um único estado inicial é equivalente a definir um subconjunto de estados iniciais, pois se tiver:  posso fazer 

vários iniciais

único estado inicial

Uma *configuração* num afnd $\mathcal{A}=(Q,\Sigma,\delta,s,F)$ é um par (q,x) em $Q\times\Sigma^*$, onde q é o estado atual e x a parte não lida da entrada

δ estados \ símbolos	a	b	λ
q_0	$\{q_0,q_1\}$	q_0	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Relacionando duas configurações em um afnd $\mathcal{A}$

$(p,x)\vdash_{\mathcal{A}}(q,y)$ se e somente se $\begin{cases} x=y \text{ e } q\in\delta(p,\lambda) & (p)\xrightarrow{\lambda}(q) \\ \text{ou} \\ \exists\sigma\in\Sigma \text{ tal que } x=\sigma y \text{ e } q\in\delta(p,\sigma) & (p)\xrightarrow{\sigma}(q)\end{cases}$

Uma palavra $x\in\Sigma^*$ é *aceita* por um afnd $\mathcal{A}=(Q,\Sigma,\delta,s,F)$ se $(s,x)\vdash^*_{\mathcal{A}}(q,\lambda)$, para algum $q\in F$

terminou de ler x

A *linguagem aceita* por um afnd $\mathcal{A}$ é $L(\mathcal{A})=\{x\in\Sigma^*: x \text{ é aceita por } \mathcal{A}\}$

Notação: $NRec(\Sigma)$ é a família de todas as linguagens aceitas por afnd.

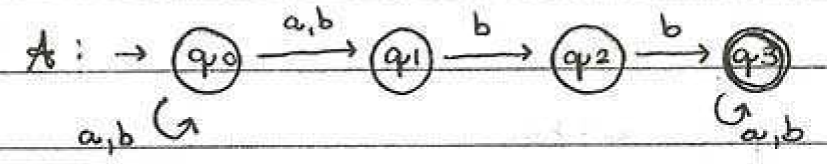
Proposição 1: Seja $\mathcal{A}=(Q,\Sigma,\delta,s,F)$ um afnd. $\forall p,q\in Q$, $\forall x,y\in\Sigma^*$, existe em $G(\mathcal{A})$ um passeio $P: p\overset{x}{\longmapsto}q$ se e somente se $(p,xy)\vdash^*_{\mathcal{A}}(q,y)$

Corolário 2: Seja $\mathcal{A}=(Q,\Sigma,\delta,s,F)$ um afnd

$L(\mathcal{A})=\{x\in\Sigma^*: \text{existe em } G(\mathcal{A}) \text{ um passeio } P: s\overset{x}{\longmapsto}q, \text{ para algum } q\in F\}$

Exemplo 2: $L=\{a,b\}^+\{bb\}\{a,b\}^*$

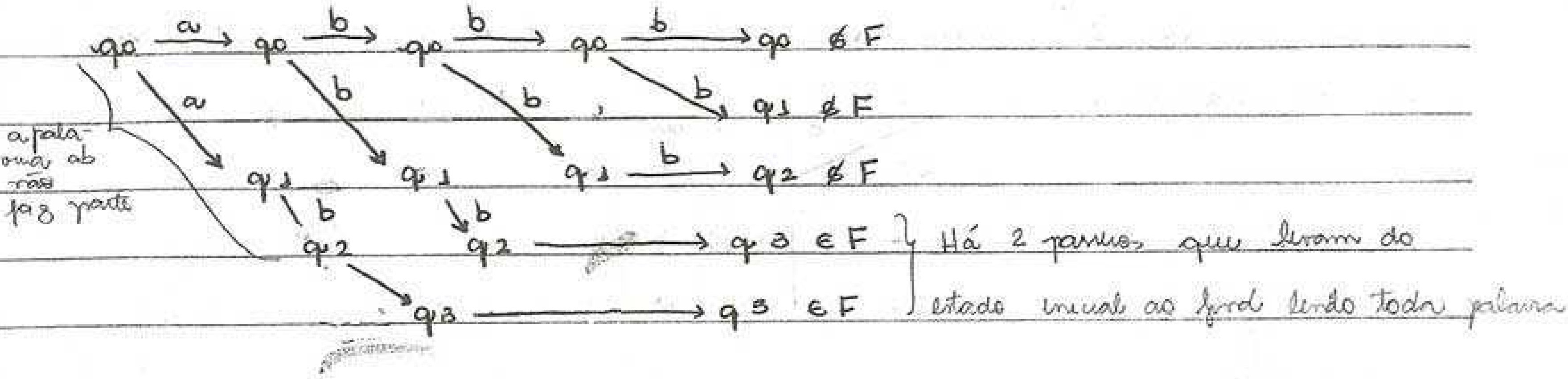
$\mathcal{A}$:



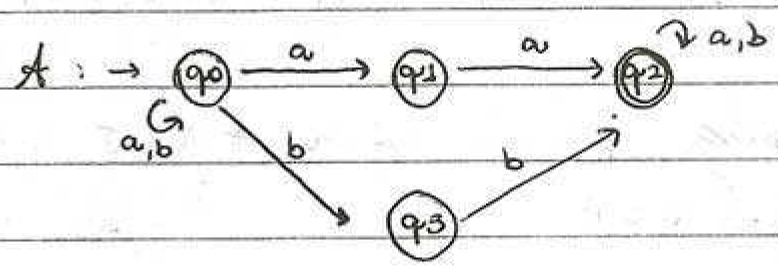
δ estados \ símbolos	a	b	λ
q_0	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\emptyset$
q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
q_3	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$

Lembrando: a imagem da função δ é um conjunto

Simulando para x = abbb

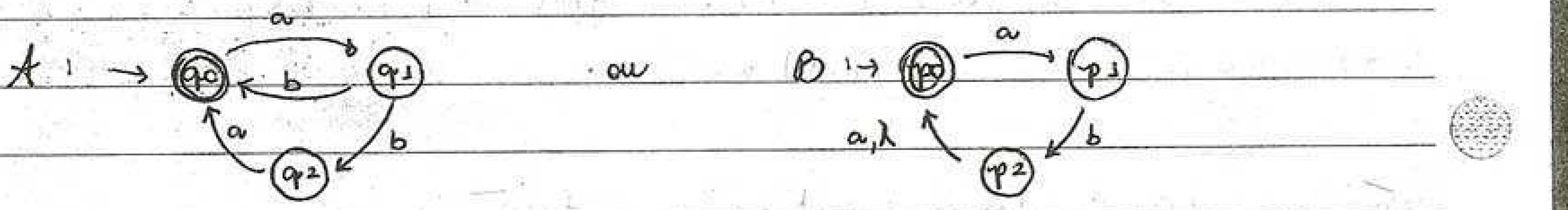


Exercício 3: $L = \{x \in \{a,b\}^* : aa \text{ ou } bb \text{ é fator de } x\}$



δ estados \ símbolos	a	b	λ
q0	{q0, q1}	{q0, q3}	∅
q1	{q2}	∅	∅
q2	{q2}	{q2}	∅
q3	∅	{q2}	∅

Exercício 4: $L = \{ab, aba\}^*$



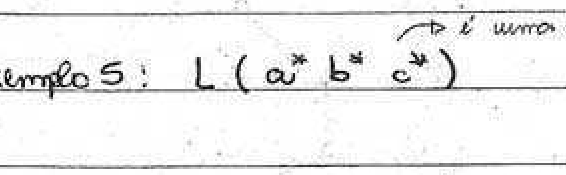
Simulando em B para x = abaab

$p_0 \xrightarrow{a} p_1 \xrightarrow{b} p_2 \xrightarrow{a} p_0 \xrightarrow{a} p_1 \xrightarrow{b} p_2 \notin F$

$p_2 \xrightarrow{\lambda} p_0 \xrightarrow{a} p_1$ X

$p_2 \xrightarrow{\lambda} p_0 \in F$ ∴ x é aceita

Exemplo 5: $L(a^* b^* c^*)$ → é uma expressão regular



para $x = bbc$

$q_0 \xrightarrow{\lambda} q_1 \xrightarrow{b} q_1 \xrightarrow{b} q_1$ X

$q_1 \xrightarrow{\lambda} q_2$ X

$q_1 \xrightarrow{\lambda} q_2$ X

$q_1 \xrightarrow{\lambda} q_2 \xrightarrow{c} q_2 \in F$ ∴ é aceita

Seja $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ um afnd $(\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \to 2^Q)$

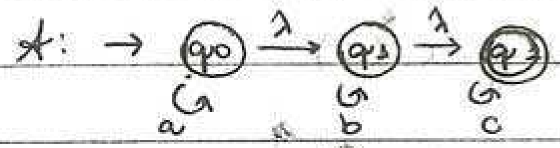
Como estender δ para $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to 2^Q$ tal que $\forall q \in Q, \forall x \in \Sigma^*$,

$\hat{\delta}(q, x) = \{p \in Q$: existe em $G(A)$ um passeio $P : q \overset{x}{\mapsto} p\}$?

$\forall q \in Q$, λ-fecho$(q) = \{p \in Q$: existe em $G(A)$ um passeio $P : q \overset{\lambda}{\mapsto} p\}$

que pode ser o passeio trivial

Exemplo: $L(a^* b^* c^*)$



λ-fecho$(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}$

λ-fecho$(q_1) = \{q_1, q_2\}$

λ-fecho$(q_2) = \{q_2\}$

$\forall K \subseteq Q$, λ-fecho$(K) = \bigcup_{q \in K} \lambda$-fecho$(q)$.

Vamos definir $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to 2^Q$, indutivamente por:

i) $\forall q \in Q$, $\hat{\delta}(q, \lambda) = \lambda$-fecho$(q)$

ii) $\forall q \in Q$, $\forall x \in \Sigma^*$, $\forall \sigma \in \Sigma$, $\hat{\delta}(q, x\sigma) = \lambda$-fecho$(\delta(\hat{\delta}(q, x), \sigma))$

Observações:

① Podemos estender δ e $\hat{\delta}$ para subconjunto de estados

$$\forall K \subseteq Q \quad \begin{cases} \delta(K, \sigma) = \bigcup_{q \in K} \delta(q, \sigma), & \forall \sigma \in (\Sigma \cup \{\lambda\}) \\ \hat{\delta}(K, x) = \bigcup_{q \in K} \hat{\delta}(q, x), & \forall x \in \Sigma^* \end{cases}$$

② $\forall q \in Q$, $\forall \sigma \in (\Sigma \cup \{q\})$

$\hat{\delta}(q, \sigma)$ pode ser diferente de $\delta(q, \sigma)$

Proposição 3: Seja $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ um afnd

$\forall p, q \in Q$, $\forall x \in \Sigma^*$, existe em $G(A)$ um passeio $P : p \overset{x}{\mapsto} q$ se e somente se $q \in \hat{\delta}(p, x)$

Corolário 4: Seja $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ um afnd

$L(A) = \{x \in \Sigma^* : \hat{\delta}(s, x) \cap F \neq \emptyset\}$

Lema 5: Para cada afnd A com λ-transições, existe um afnd B sem λ-transições tal que $L(A) = L(B)$

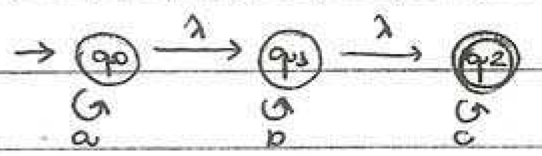
Algoritmo para determinar λ-fecho (K)

- Recebe
  - um afnd $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, onde $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \to 2^Q$
  - um subconjunto de estados $K \subseteq Q$
- Determina : Fecho = λ-fecho (K)

```
Fecho ← ∅
Inicializa Fila (Fila);
para (cada estado q ∈ K) faça           } O(|Q|)
      Fecho ← Fecho ∪ {q};
      Insere Fila (Fila, q);
enquanto (não Fila Vazia (Fila)) faça                       } O(|Q|²)
      Remove Fila (Fila, q);
      para (cada estado p ∈ δ(q, λ)) faça   } O(|Q|)
            se (p ∉ Fecho)
               então
                  Fecho ← Fecho ∪ {p}
                  Insere Fila (Fila, p);
devolve Fecho
```

Observação: O consumo de tempo do algoritmo no pior caso é $O(|Q|^2)$

Exemplo:



$x = abc$

$$
\begin{array}{lll}
q_0 \xrightarrow{a} q_0 & & \\
\downarrow \lambda \qquad \downarrow \lambda & & \\
q_1 \times \quad q_1 \xrightarrow{b} q_1 & & \\
\downarrow \lambda \qquad \downarrow \lambda \qquad \downarrow \lambda & & \\
q_2 \times \quad q_2 \times \quad q_2 \xrightarrow{c} q_2 \in F & &
\end{array}
$$

Algoritmo para verificar se x é aceita por A

- Recebe $\begin{cases} \text{uma palavra } x \in \Sigma^* \\ \text{um afnd } A = (Q, \Sigma, \delta, s, F) \end{cases}$
- Verifica se x é aceita por A

$K \leftarrow \lambda\text{-fecho}(s);$ $\quad O(|Q|^2)$

entrada $\leftarrow x$;

enquanto (não ler toda entrada e $K \neq \emptyset$) faça

  $\sigma \leftarrow$ leia o próximo símbolo de entrada

  $K \leftarrow \underbrace{\lambda\text{-fecho}(\delta(K,\sigma))}$; $\quad \delta(K,\sigma) = \bigcup_{q \in K} (q, \sigma)$ $\quad \rightarrow O(|Q|^2)$

se $(K \cap F \neq \emptyset)$ $\quad O(|Q|^2)$

  então x é aceita por A

  senão x não é aceita por A

Observação: No pior caso, o consumo de tempo desse algoritmo é $O(|x| \cdot |Q|^2)$

spiral

$NRec(\Sigma) = Rec(\Sigma)$

$A : (Q_A, \Sigma, \delta_A, s_A, F_A)$ afd $\quad \delta_A : Q_A \times \Sigma \to Q_A$

$B = (Q_A, \Sigma, \delta_B, s_A, F_A)$ afnd

$\forall q \in Q_A$, $\delta_B(q, \sigma) = \{\delta_A(q, \sigma)\}$ $\quad \forall q \in Q_A$, $\delta_B(q, \lambda) = \emptyset$

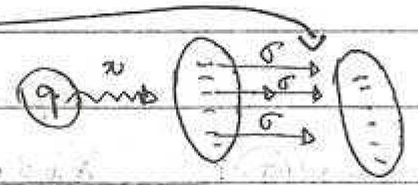
$\forall \sigma \in \Sigma$

spiral

16 / 9 / 8

no máx nº de estados ao quadrado

λ-fecho $\big(\underbrace{\delta(\underbrace{\hat{\delta}(q,x)}, \sigma)}\big) \Rightarrow$



nº máx nº de estados ao quadrado

Teorema 6: Para cada afnd A, existe um afd tal que $L(A) = L(B)$.

Prova: (construção dos subconjuntos - Rabin e Scott - 1959)

Seja $A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, s_A, F_A)$ um afnd. Considere um af $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, s_B, F_B)$, onde

$Q_B = 2^{Q_A}$

$s_B = \lambda\text{-fecho}(s_A)$ todo s_A e + onde se consegue chegar c/ λ.

$F_B = \{K \in Q_B : K \cap F_A \neq \emptyset\}$ $\forall K \in Q_B$, $\forall$

$\forall K \in Q_B, \forall \sigma \in \Sigma, \delta_B(K,\sigma) = \lambda\text{-fecho}\underbrace{(\underbrace{\delta_A(K,\sigma)}_{\text{única aresta } \sigma})}_{\text{subcjto de estados de } A \text{ e estado de } B}$

$K, \sigma \longrightarrow A$

Observação: Por construção, δ_B é uma função de $Q_B \times \Sigma \rightarrow Q_B$. Logo, B é determinístico

$\hat{\delta}_B(K,\lambda) = K$

$\hat{\delta}_B(K, x\sigma) = \delta(\hat{\delta}(K,x), \sigma)$.

Vamos estender δ_B para $\hat{\delta}_B : Q_B \times \Sigma^* \rightarrow Q_B$ de forma usual e utilizar δ_B também para $\hat{\delta}_B$.

Propriedade: $\forall x \in \Sigma^*, \forall q \in Q_A$, $\hat{\delta}_A(q,x) = \delta_B(\lambda\text{-fecho}(q), x)$

Prova por indução em $|x|$

Vamos provar que $L(B) = L(A)$.

Seja $x \in \Sigma^*$

$\rightarrow$ determinístico $\therefore$ é 1 único estado

$x \in L(B)$ se e somente se $\delta_B(s_B, x) \in F_B$

se e somente se $\delta_B(s_B, x) \cap F_A \neq \emptyset$ $\rightarrow$ ñ deter. $\Rightarrow$ é um cjto

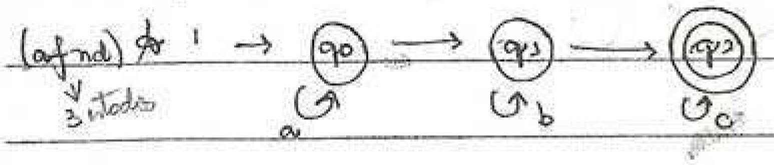
se e somente se $\delta_B(\lambda\text{-fecho}(s_A), x) \cap F_A \neq \emptyset$

se e somente se $\delta_A(s_A, x) \cap F_A \neq \emptyset$

se e somente se $x \in L(A)$

Corolário 7: $NRec(\Sigma) = Rec(\Sigma)$

Exemplo:



λ-fecho(q0) = {q0, q1, q2}

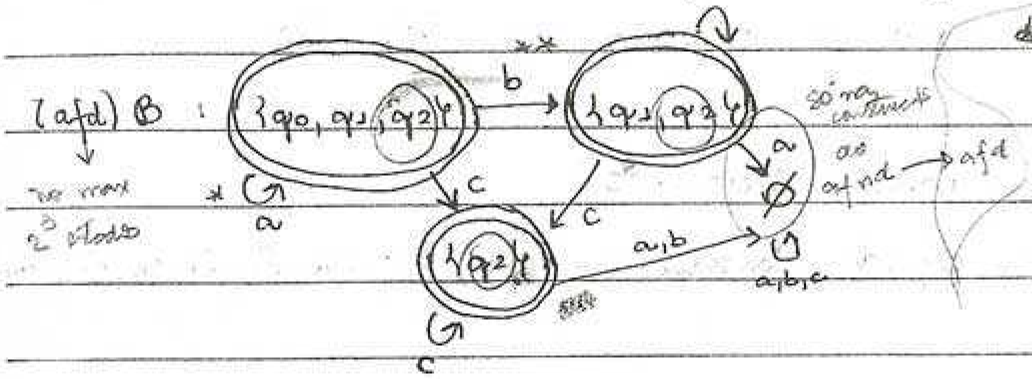
λ-fecho(q1) = {q1, q2}

λ-fecho(q2) = {q2}

* $\delta_B(\{q_0,q_1,q_2\},a) = q_0$ e seu λ-fecho

** $\delta_B(\{q_0,q_1,q_2\},b) = q_1$ e seu λ-fecho

$\delta_B(\{q_0,q_1,q_2\},c) = q_2$ e λ-fecho



$\delta_B(\{q_1,q_2\},a) = \emptyset$ → elemento de 2^{Q_A}

$\delta_B(\{q_1,q_2\},b) = q_1$ e seu fecho

$\delta_B(\{q_1,q_2\},c) = q_2$ e seu fecho.

Seja $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ um af.

$\forall q \in Q$, dizemos que q é acessível se existe em $G(A)$ um passeio $P: s \xrightarrow{x} q$ para alguma palavra x em Σ^*

Algoritmo: Construção dos subconjuntos

- recebe: um afnd $A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, s_A, F_A)$
- constrói: um afd $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, s_B, F_B)$ equivalente a A

$s_B \leftarrow$ λfecho(s_A); // considere s_B não-marcado ⇒ $O(|Q_A|^2)$

$F_B \leftarrow \emptyset$;

$Q_B \leftarrow \{s_B\}$;

enquanto (existe um estado não-marcado K em Q_B) faça ⇒ $2^{|Q_A|}$

  marque K;

  se ($K \cap F_A \neq \emptyset$) então $F_B \leftarrow F_B \cup \{K\}$;

  para (cada $\sigma \in \Sigma$) faça → $|\Sigma|$ $O(|Q_A|^2)$

    $J \leftarrow$ λ-fecho ($\delta_A(K,\sigma)$); o fecho: $O(|Q_A|^2)$

    se ($J \notin Q_B$) então $Q_B \leftarrow Q_B \cup \{J\}$; // considere J não marcado

    $\delta_B(K,\sigma) \leftarrow J$;

$\Sigma . Q(A)^2$

devolva ($B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, s_B, F_B)$);

Observação:

① Constrói somente a parte acessível de $\mathcal{B}$ ($|Q_B| \leq 2^{|Q_A|}$)

② No pior caso, o consumo de tempo desse algoritmo é $O(2^{|Q_A|} \cdot |\Sigma| \cdot |Q_A^2|)$

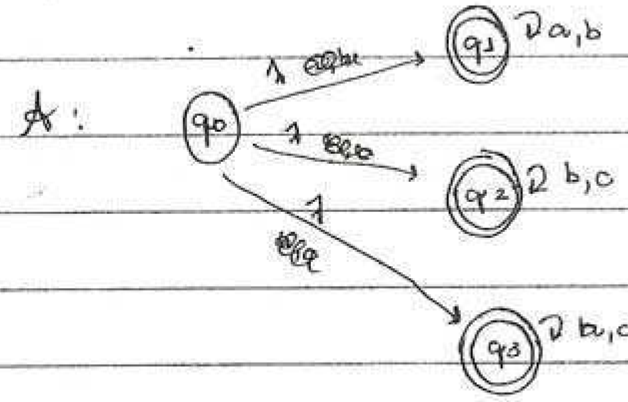
exponencial!!!

Exemplo 1: $L = \{ x \in \Sigma^* : \sigma$ não ocorre em x, para algum σ em $\Sigma \}$

Existe um afnd com $n+1$ estados onde $n = |\Sigma|$

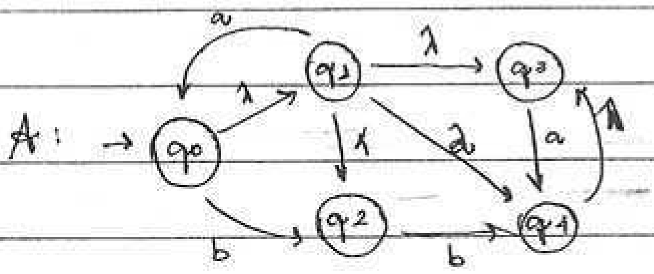
O afd obtido pela construção dos subconjuntos tem 2^n estados

$\Sigma = \{a, b, c\}$ $n = 3$



construa $\mathcal{B}$

Exemplo 2:
L&P, Ex 2.2.3



λ fecho-(q0) = {q0, q1, q2, q3}

18 / 9 / 8

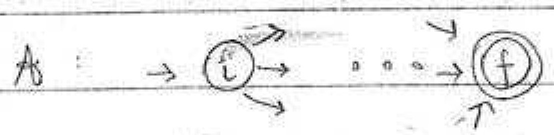
$\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \to 2^{Q}$

- Um afnd $A = (Q, \Sigma, \delta, i, F)$ é *normalizado* se:

i) $F = \{f\}$ e $f \neq i$ — 1 estado final apenas e diferente do inicial

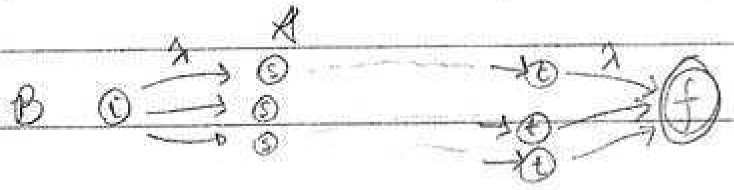
ii) $\forall \sigma \in (\Sigma \cup \{\lambda\})$, $\delta(f, \sigma) = \emptyset$ → não há transição saindo de f: (f) $\not\to$

iii) $\forall q \in Q$, $\forall \sigma \in (\Sigma \cup \{\lambda\})$, $i \notin \delta(q, \sigma)$ — o i não recebe / não existem transições com término em i



Há sempre um normalizado p/ um afnd?

. Sim faz novos estados i e f c/ aresta λ de i p/ os iniciais e dos finais p/ f



Lema 8: Para cada afnd A existe um afnd normalizado B tal que $L(A) = L(B)$

Prova: Seja $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ um afnd. Considere o afnd $B = (Q \cup \{i, f\}, \Sigma, \delta_B, i, \{f\})$, onde $\{i, f\} \cap Q = \emptyset$ e δ_B é definido por:

$\delta_B(i, \lambda) = \{s\}$

$\forall \sigma \in \Sigma$, $\delta_B(i, \sigma) = \emptyset$ — $\emptyset$ não é estado n det!

$\forall q \in Q$, $\forall \sigma \in \Sigma$, $\delta_B(q, \sigma) = \delta(q, \sigma)$

$\forall q \in (Q - F)$ (os não finais), $\delta_B(q, \lambda) = \delta(q, \lambda)$

$\forall q \in F$, $\delta_B(q, \lambda) = \delta(q, \lambda) \cup \{f\}$ → p. c/ arco λ que já tinha + o final

$\forall \sigma \in (\Sigma \cup \{\lambda\})$, $\delta_B(f, \sigma) = \emptyset$

Observação: Por construção, segue que B é normalizado,

Prove que $L(B) = L(A)$

ñ pode provar Kleene e outras coisas que ainda ñ foram provadas...

/ /

$\cup \cdot *$

$NRec(\Sigma)$

$|||$

Lema 9: $NRec(\Sigma)$ é fechada para união, concatenação e estrela.

$Rec(\Sigma) \overset{?}{=} Reg(\Sigma)$

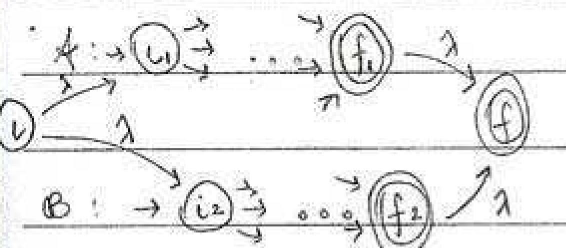
fechada $\cup$ $\cap$ C

$\cup$ $\cdot$ $*$ inverso ...

Prova: Sejam L_1 e L_2 em $NRec(\Sigma)$

Então, existem afnd normalizados $\mathcal{A}=(Q_1,\Sigma,\delta_1,i_1,\{f_1\})$ e $\mathcal{B}=(Q_2,\Sigma,\delta_2,i_2,\{f_2\})$, com $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ tais que $L(\mathcal{A})=L_1$ e $L(\mathcal{B})=L_2$.

1) União: Considere o afnd $\mathcal{C}=(Q_1 \cup Q_2 \cup \{i,f\}, \Sigma, \delta, i, \{f\})$, onde $\{i,f\} \cap (Q_1 \cup Q_2) = \emptyset$.



Prova: $\forall$ palavra em $L(\mathcal{A})$, com $i_1 \xrightarrow{x} f_1$

$i \xrightarrow{\lambda} i_1 \overset{x}{\rightsquigarrow} f_1 \xrightarrow{\lambda} f$ ✓

δ é definida por:

$\delta(i,\lambda) = \{i_1, i_2\}$

$\forall \sigma \in \Sigma,\ \delta(i,\sigma) = \emptyset$

$\forall q \in (Q_1 - \{f_1\}), \forall \sigma \in (\Sigma \cup \{\lambda\}),\ \delta(q,\sigma) = \delta_1(q,\sigma)$

$\forall q \in (Q_2 - \{f_2\}), \forall \sigma \in (\Sigma \cup \{\lambda\}),\ \delta(q,\sigma) = \delta_2(q,\sigma)$

$\delta(f_1,\lambda) = \{f\}$

$\forall \sigma \in \Sigma,\ \delta(f_1,\sigma) = \emptyset$

$\delta(f_2,\lambda) = \{f\}$

$\forall \sigma \in \Sigma,\ \delta(f_2,\sigma) = \emptyset$

$\forall \sigma \in (\Sigma \cup \{\lambda\}),\ \delta(f,\sigma) = \emptyset$

Observação: Por construção, segue que $\mathcal{C}$ é normalizado.

Obs: Todo passeio em $G(\mathcal{A})$ ou $G(\mathcal{B})$ é um passeio em $G(\mathcal{C})$

Vamos provar que $L(\mathcal{C}) = L(\mathcal{A}) \cup L(\mathcal{B})$

($\supseteq$) $L(\mathcal{A}) \cup L(\mathcal{B}) \subseteq L(\mathcal{C})$

$x \in L(\mathcal{A}) \cup L(\mathcal{B})$

$x \in L(\mathcal{A})$, $\exists\ p_1 : i_1 \overset{x}{\rightsquigarrow} f_1$

$\exists$ em $G(\mathcal{C})$ $p = (i \xrightarrow{\lambda} i_1)\, p_1\, (f_1 \xrightarrow{\lambda} f)$

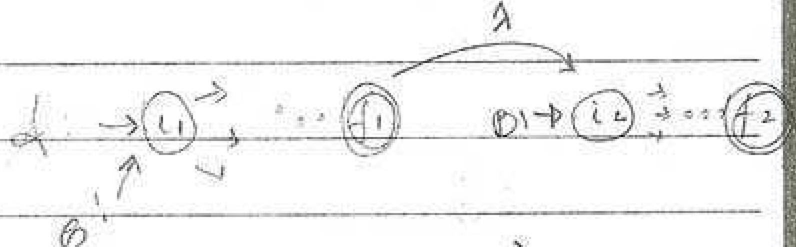
(⊆) $L(\mathcal{C}) \subseteq L(\mathcal{A}) \cup L(\mathcal{B})$

Seja $x \in L(\mathcal{C})$. Então existe em $G(\mathcal{C})$ um passeio $P: i \overset{x}{\leadsto} f$.

Como as únicas transições em $\mathcal{C}$ com origem em i são $i \xrightarrow{\lambda} i_1$ ou $i \xrightarrow{\lambda} i_2$, e as únicas transições em $\mathcal{C}$ com término em f são $f_1 \xrightarrow{\lambda} f$ ou $f_2 \xrightarrow{\lambda} f$, $\mathcal{C}$ é normalizado, $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ e em $\mathcal{C}$ não existem transições entre estados de Q_1 e Q_2, segue que o passeio P é da forma $P = (i \xrightarrow{\lambda} i_k) P_k (f_k \xrightarrow{\lambda} f)$, onde $P_k : i_k \overset{x}{\leadsto} f_k$ para k em $\{1,2\}$.

Logo, ou existe em $G(\mathcal{A})$ o passeio $P_1 : i_1 \overset{x}{\leadsto} f_1$ ou existe em $G(\mathcal{B})$ o passeio $P_2 : i_2 \overset{x}{\leadsto} f_2$. Portanto, ou $x \in L(\mathcal{A})$ ou $x \in L(\mathcal{B})$.

2) Concatenação: Considere o afnd



$\mathcal{C}: (Q_1 \cup Q_2, \Sigma, \delta, i_1, \{f_2\})$ onde δ é definida por: $\forall q \in (Q_1 - \{f_1\}), \forall \sigma \in (\Sigma \cup \{\lambda\}), \delta(q,\sigma) = \delta_1(q,\sigma)$

$\forall q \in Q_2, \forall \sigma \in (\Sigma \cup \{\lambda\}), \delta(q,\sigma) = \delta_2(q,\sigma)$

$\delta(f_1, \lambda) = \{i_2\}$

$\forall \sigma \in \Sigma, \delta(f_1, \sigma) = \emptyset$

Observação: Por construção, segue que $\mathcal{C}$ é normalizado. Vamos provar que $L(\mathcal{C}) = L(\mathcal{A})L(\mathcal{B})$

Obs: todo passeio em $G(\mathcal{A})$ ou em $G(\mathcal{B})$ é um passeio em $G(\mathcal{C})$

(⊇) $L(\mathcal{A})L(\mathcal{B}) \subseteq L(\mathcal{C})$

$x \in L(\mathcal{A})L(\mathcal{B})$ $\exists u \in L(\mathcal{A})$ e $v \in L(\mathcal{B})$ tal que $x = uv$

$\exists P_1 : i_1 \overset{u}{\underset{\mathcal{A}}{\leadsto}} f_1$. $\exists P_2 : i_2 \overset{v}{\leadsto} f_2$

$\exists$ em $G(\mathcal{C})$ o passeio $P = P_1 (f_1 \xrightarrow{\lambda} f_2) P_2$ com $\|P\| = \|P_1\| \lambda \|P_2\| = uv = x$ e $x \in L(\mathcal{C})$

(⊆) $L(\mathcal{C}) \subseteq L(\mathcal{A})L(\mathcal{B})$

Seja $x \in L(\mathcal{C})$. Então, existe em $G(\mathcal{C})$ um passeio $P: i_1 \overset{x}{\leadsto} f_2$

$(i_1 \overset{u}{\leadsto} f_1 (f_1 \xrightarrow{\lambda} i_2) i_2 \overset{v}{\leadsto} f_2, \ uv = x)$

Como $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ ($i_1 \in Q_1$ e $f_2 \in Q_2$,) e em $\mathcal{C}$ não existem transições de estados de Q_2 para estados de Q_1 e a única transição de um estado de Q_1 para um estado de Q_2

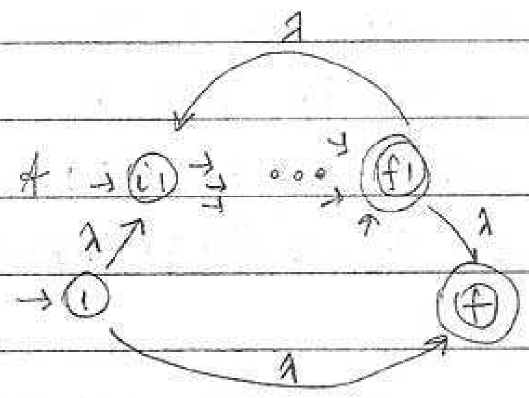
é $f_1 \xrightarrow{\lambda} i_2$, segue que o passeio P deve ser da forma:

$P = i_1 \overset{u}{\rightsquigarrow} f_1 \; (f_1 \xrightarrow{\lambda} i_2) \; i_2 \overset{v}{\rightsquigarrow} f_2$, tal que $uv = x$.

Logo, $i_1 \overset{u}{\rightsquigarrow} f_1$ é um passeio em $G(A)$ e $i_2 \overset{v}{\rightsquigarrow} f_2$ é um passeio em $G(B)$.

Portanto, $u \in L(A)$ e $v \in L(B)$. Assim, $x = uv \in L(A)L(B)$.

3) Estrela



$L(B) = (L(A))^*$

18 / 9 / 8

1.2 *) $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$

$AB \cap AC \subseteq A(\underbrace{B \cap C}_{\emptyset}) \to F$

$\underbrace{\quad}_{\neq \emptyset} \quad \underbrace{\quad}_{\emptyset}$

• $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$

Prova: Seja $w \in A(B \cap C)$

Existe uma fatoração com $x \in A$, $y \in B \cap C$ para w (ou seja, $w = xy$).

Note que $y \in B$ e $y \in C$, então, $w = xy \in AB$ e $w \in AC \therefore w \in AB \cap AC$

1.4b) Se $A \subseteq B$, então $A^* \subseteq B^*$

(anterior: Se $A \subseteq B$, então $A^n \subseteq B^n \ \forall n \geq 0$)

$A^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} B^n = B^*$

Mas $\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^i} < 2 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$

$A^* \overset{?}{\subseteq} B^*$

$\lambda \notin \Sigma$ Seja $w \in A^*$, w tem uma fatoração tal que $w = y_1 y_2 \dots y_n$, $n \geq 0$ e $y_i \in A$, $1 \leq i \leq n$

Se $w = \lambda$ então $w \in B^*$

caso contrário, como para $\forall y_i$, temos $y_i \in A$ e $A \subseteq B$, então $y_i \in B$, e portanto $y_1 y_2 \dots y_n$ é uma fatoração de w com palavras de B. Então $w \in B^*$

1.4e) $(A \cup B)^* = A^*(BA^*)^*$

$A^*(BA^*)^* \subseteq (A \cup B)^*$

Seja $w \in A^*(BA^*)^*$, então $w = y_1 y_2 \dots y_n$, $n \geq 0$, onde $y_i \in A^*$ ou $y_i \in (BA^*)^*$

Se $y_i \in A^*$, $y_i \in (A \cup B)^*$

Se $y_i \in (BA^*)^*$, $y_i = x_{i1}, x_{i2} \dots x_{in}$, onde $x_{ij} \in B$ ou $x_{ij} \in A^*$.

$\Downarrow$

$x_{ij} \in (A \cup B)^*$

$(A \cup B)^* \subseteq \underbrace{A^*(BA^*)^*}_{\text{estou marcando onde } B \text{ ocorre na sequência}}$

spiral

/ /

1. $(A \cup B)^* \subseteq A^*(BA^*)^*$

Seja $x \in (A \cup B)^*$. Vamos mostrar por indução em $|x|$ que $x \in A^*(BA^*)^*$.

Se $|x| = 0$, temos que $x = \lambda$ e $\lambda \in A^*(BA^*)^*$

Se $|x| > 0$, suponha que o resultado seja válido para palavras menores de $(A \cup B)^*$. Como $x \in (A \cup B)^*$, existem $n > 0$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n \in (A \cup B)$ tal que $x = y_1 \ldots y_n$. Se para todo $1 \leq i \leq n$ temos que $y_i \in A$, então $x \in A^*$ e como $A^* \subseteq A^*(BA^*)^*$, segue que $x \in A^*(BA^*)^*$

$A^* \; \boxed{k} \; (\underset{\in (A \cup B)^*}{w})$, $k \in B$

Caso contrário, seja k o menor índice tal que $y_k \in B$. Seja w tal que $x = y_1 \ldots y_{k-1} y_k w$. Note que $w \in (A \cup B)^*$ já que $w = y_{k+1} \ldots y_n$ e $y_i \in A \cup B$, $k+1 \leq i \leq n$. Por HI, temos que $w \in A^*(BA^*)^*$, já que $|w| < |x|$. Pela minimalidade de k, temos que $\underbrace{y_1, \ldots, y_{k-1}}_{\alpha} \in A^*$.

sabemos $w \in A^*(BA^*)^*$
e $x \in A^* B A^*(BA^*)^*$
$\therefore x \in A^*(B\tilde{A}) \subseteq A^*(BA^*)^*$

Portanto, x é da forma $\alpha y_k w$ e portanto, $x \in A^* B (A^*(BA^*)^*)$, então $x \in A^*(BA^*)^* \subseteq A^*(BA^*)^*$

Prefixo$(L) = \{ x \in \Sigma^*$ existe $y \in \Sigma^*$ tal que $xy \in L \}$

L é regular $\Rightarrow$ Pref(L) é regular.

Indução no número de operadores de α.

(Seja α uma expressão regular tal que $L = L(\alpha)$)

Se $\alpha = \emptyset$ então $p(\emptyset)$ é vazio, $L(p(\alpha)) = \emptyset$.

Como pref$(\emptyset) = \emptyset$, temos o resultado desejado.

Se $\alpha = \sigma$, $\sigma \in \Sigma$, então $p(\sigma) = (\lambda + \sigma)$

Se $\alpha = \lambda$, ...

$\rightarrow$ Se $\alpha = A + B$, pref$(L(\overset{\alpha}{A+B})) \overset{?}{=} L(p(\alpha))$

$L(p(\alpha)) = L(p(A) + p(B)) = L(p(A)) + L(p(B)) =$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{HI} \qquad\quad \text{HI}$

$\underset{L_2}{\text{pref}(L(A))} + \underset{L_3}{\text{pref}(L(B))} \overset{?}{=} \underset{L_1}{\text{pref}(L(A) + L(B))}$

$\subseteq$ óbvio

$\text{H} \rightarrow \text{Def exp } \mathcal{R}\mathcal{S}$

pref$(L(A+B))$

$x \in L_1$, $x \notin L_2 \cup L_3$

$\exists y$, $xy \in L(A)$ ou $xy \in L(B)$

Definição de p:
$\emptyset^* = \lambda$
$\emptyset$: $p(\emptyset) = \emptyset$, λ: $p(\lambda) = \lambda$
σ: $p(\sigma) = (\lambda + \sigma)$
$A+B$: $p(A+B) = p(A) + p(B)$
AB: $p(AB) = p(A) + Ap(B)$?

$A = \{a, ac\} = \lambda, a, ac$
$B = \{b\} = \lambda, b$
$AB = \{acb\}$
pref$(AB) = \lambda, a, ac, acb, ab\}$

Se $A = \emptyset \Rightarrow AB = \emptyset \Rightarrow p(AB) = \emptyset$
& $p(A) = \emptyset$ & $Ap(B) = \emptyset$
Se $B = \emptyset \Rightarrow p(AB) = \emptyset$, $p(A) \neq \emptyset$
e $Ap(B) = \emptyset$

$A^* \rightarrow p(A^*) = A^* p(A) = A^*(p(A) + \lambda)$
Se $A = \emptyset$
$\emptyset^* = \lambda \Rightarrow p(A^*) = \lambda$, mas $A^* p(A) \neq \emptyset$

/ /

Se $\alpha = A^*$, $pref(L(A^*)) \stackrel{?}{=} L(p(A^*)) = L(A^*(p(A)+\lambda))$

Seja $x \in pref(L(A^*))$, existe $y \in \Sigma^*$ tal que $xy \in A^*$

$x \in L(A^*(p(A)+\lambda))$.

$L(A^*) \subseteq L(A^*(p(A)+\lambda))$

$L(A^*) = L(A^*(+\lambda))$

Se $y = \lambda$ $x \in L(A^*(p(A)+\lambda))$

Se $y \in A^*$, $xy \in A^*$ $\rightarrow x \in A^* w$

ι $vw \in A \Rightarrow v \in pref(A)$

Como $A \in A^* \rightarrow v \in pref(A^*)$

$x = \underbrace{y_1 y_2 \ldots y_k}_{\in A} \underbrace{v}_{pref A}$

Por HI $p(A)$ representa $pref(A)$

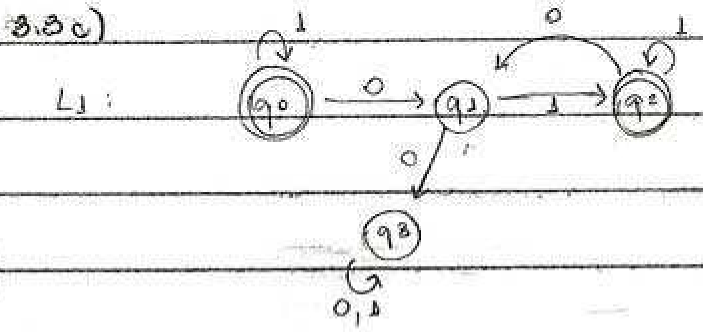
Seja $x \in pref$ —

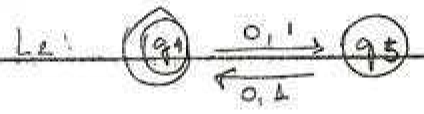
e se ñ $\exists x$? e se fosse vazio?

$pref(\emptyset) = \lambda$

$L(A^*(p(A)+\lambda)) = L(\underbrace{A^*(p(A))}_{\text{se vazio} = \emptyset}) + L(A^*)$

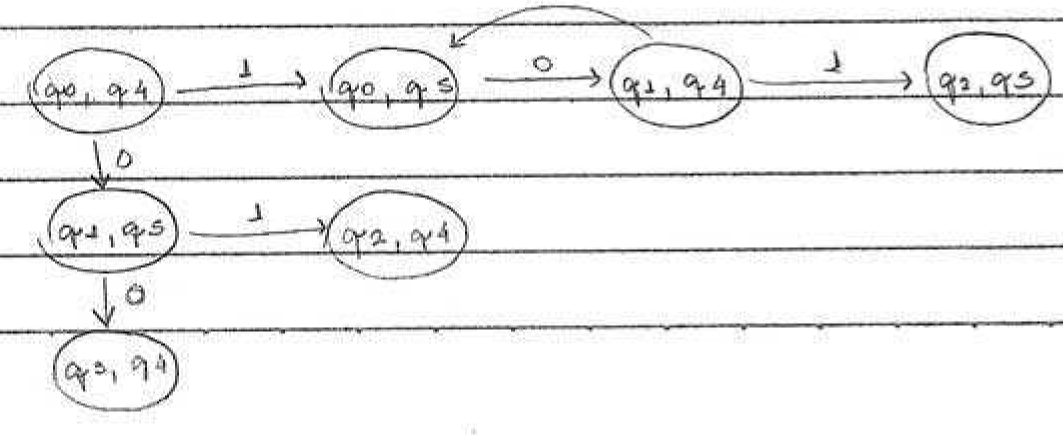
3.3 c)





$(L_1 \cup L_2) \setminus (L_1 \cap L_2)$

$(1^*(01^*)^*) \cup (|x|$ é par$) \setminus (1^*(01^*)^*) \cap (|x|$ é par$)$



/ /

dobro L_1 e X