18 / 9 / 8

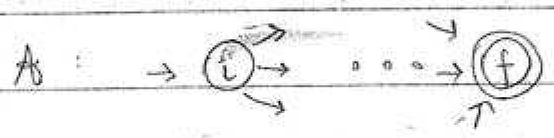
$\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \to 2^Q$

• Um afnd $A = (Q, \Sigma, \delta, i, F)$ é normalizado se:

i) $F = \{f\}$ e $f \neq i$: 1 estado final apenas e diferente do inicial

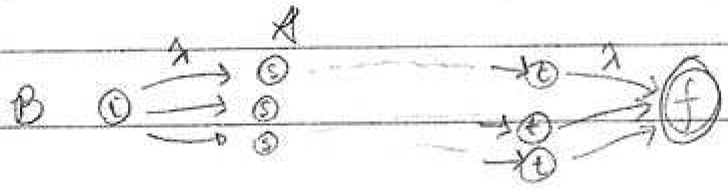
ii) $\forall \sigma \in (\Sigma \cup \{\lambda\}), \ \delta(f, \sigma) = \emptyset$ → não há transição saindo de f: (f)

iii) $\forall q \in Q, \ \forall \sigma \in (\Sigma \cup \{\lambda\}), \ i \notin \delta(q, \sigma)$ o i não recebe | não existem transições com término em i



Há sempre um normalizado p/ um afnd?

. Sim faz novos estados i e f c/ aresta λ de i p/ os iniciais e dos finais p/ f



Lema 8: Para cada afnd A existe um afnd normalizado B tal que $L(A) = L(B)$

Prova: Seja $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ um afnd. Considere o afnd $B = (Q \cup \{i, f\}, \Sigma, \delta_B, i, \{f\})$, onde $\{i, f\} \cap Q = \emptyset$ e δ_B é definido por:

$\delta_B(i, \lambda) = \{s\}$

∅ ñ é estado ñ det!

$\forall \sigma \in \Sigma, \ \delta_B(i, \sigma) = \emptyset$

$\forall q \in Q, \ \forall \sigma \in \Sigma, \ \delta_B(q, \sigma) = \delta(q, \sigma)$

$\forall q \in (\overset{\text{não finais}}{Q - F}), \ \delta_B(q, \lambda) = \delta(q, \lambda)$

→ p. c/ arco λ que já tinha + o final

$\forall q \in F, \ \delta_B(q, \lambda) = \delta(q, \lambda) \cup \{f\}$

$\forall \sigma \in (\Sigma \cup \{\lambda\}), \ \delta_B(f, \sigma) = \emptyset$

Observação: Por construção, vê-se que B é normalizado.

Prove que $L(B) = L(A)$

ñ pode provar Kleene e outras coisas que ainda ñ foram provadas.

/ /

$\cup \cdot *$

$NRec(\Sigma)$

$|||$

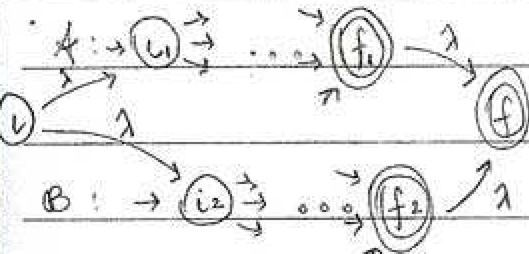
Lema 9: $NRec(\Sigma)$ é fechada para união, concatenação e estrela. $Rec(\Sigma) \overset{?}{=} Reg(\Sigma)$

fechada $\cup$ $\cap$ c — $\cup$ $\cdot$ $*$ inverso

Prova: Sejam L_1 e L_2 em $NRec(\Sigma)$

Então, existem afnd normalizados $A=(Q_1,\Sigma,\delta_1,i_1,\{f_1\})$ e $B=(Q_2,\Sigma,\delta_2,i_2,\{f_2\})$, com $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ tais que $L(A)=L_1$ e $L(B)=L_2$.

1) União: Considere o afnd $C=(Q_1 \cup Q_2 \cup \{i,f\}, \Sigma, \delta, i, \{f\})$, onde $\{i,f\}$ $\{i,f\} \cap (Q_1 \cup Q_2) = \emptyset$.



Prova: $\forall$ palavra x em $L(A)$ com $i_1 \xrightarrow{x} f_1$

$i \xrightarrow{\lambda} i_1 \overset{x}{\rightsquigarrow} f_1 \xrightarrow{\lambda} f$ ✓

δ é definida por:

$\delta(i,\lambda)=\{i_1,i_2\}$

$\forall \sigma \in \Sigma,\ \delta(i,\sigma)=\emptyset$

$\forall q \in (Q_1-\{f_1\}),\ \forall \sigma \in (\Sigma \cup \{\lambda\}),\ \delta(q,\sigma)=\delta_1(q,\sigma)$

$\forall q \in (Q_2-\{f_2\}),\ \forall \sigma \in (\Sigma \cup \{\lambda\}),\ \delta(q,\sigma)=\delta_2(q,\sigma)$

$\delta(f_1,\lambda)=\{f\}$

$\forall \sigma \in \Sigma,\ \delta(f_1,\sigma)=\emptyset$

$\delta(f_2,\lambda)=\{f\}$

$\forall \sigma \in \Sigma,\ \delta(f_2,\sigma)=\emptyset$

$\forall \sigma \in (\Sigma \cup \{\lambda\}),\ \delta(f,\sigma)=\emptyset$

Observação: Por construção, segue que C é normalizado.

Obs: Todo passeio em $G(A)$ ou $G(B)$ é um passeio em $G(C)$

Vamos provar que $L(C)=L(A)\cup L(B)$

$(\supseteq)$ $L(A)\cup L(B) \subseteq L(C)$

$x \in L(A)\cup L(B)$

$x \in L(A)$, $\exists\ p_1 : i_1 \overset{x}{\rightsquigarrow} f_1$

$\exists$ em $G(C)$ $p=(i \xrightarrow{\lambda} i_1)\, p_1\, (f_1 \xrightarrow{\lambda} f)$

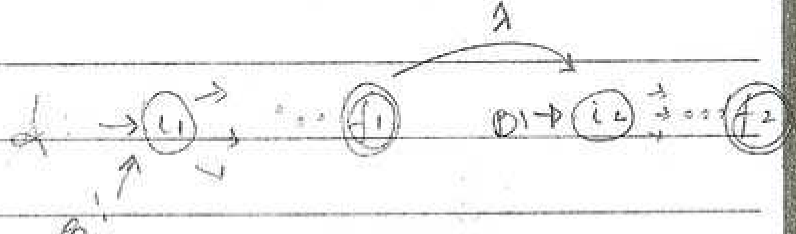
(⊇) $L(\mathcal{C}) \subseteq L(\mathcal{A}) \cup L(\mathcal{B})$

Seja $x \in L(\mathcal{C})$. Então existe em $G(\mathcal{C})$ um passeio $P: i \overset{x}{\rightsquigarrow} f$.

Como as únicas transições em $\mathcal{C}$ com origem em i são $i \xrightarrow{\lambda} i_1$ ou $i \xrightarrow{\lambda} i_2$, e as únicas transições em $\mathcal{C}$ com término em f são $f_1 \xrightarrow{\lambda} f$ ou $f_2 \xrightarrow{\lambda} f$, $\mathcal{C}$ é normalizado, $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ e em $\mathcal{C}$ não existem transições entre estados de Q_1 e Q_2, segue que o passeio P é da forma $P = (i \xrightarrow{\lambda} i_k) P_k (f_k \xrightarrow{\lambda} f)$, onde $P_k: i_k \overset{x}{\rightsquigarrow} f_k$ para k em $\{1,2\}$.

Logo, ou existe em $G(\mathcal{A})$ o passeio $P_1: i_1 \overset{x}{\rightsquigarrow} f_1$ ou existe em $G(\mathcal{B})$ o passeio $P_2: i_2 \overset{x}{\rightsquigarrow} f_2$. Portanto, ou $x \in L(\mathcal{A})$ ou $x \in L(\mathcal{B})$.

2) Concatenação: Considere o afnd



$\mathcal{C}: (Q_1 \cup Q_2, \Sigma, \delta, i_1, \{f_2\})$ onde δ é definida por: $\forall q \in (Q_1 - \{f_1\}), \forall \sigma \in (\Sigma \cup \{\lambda\}), \delta(q,\sigma) = \delta_1(q,\sigma)$

$\forall q \in Q_2, \forall \sigma \in (\Sigma \cup \{\lambda\}), \delta(q,\sigma) = \delta_2(q,\sigma)$

$\delta(f_1, \lambda) = \{i_2\}$

$\forall \sigma \in \Sigma, \delta(f_1,\sigma) = \emptyset$

Observação: Por construção, segue que $\mathcal{C}$ é normalizado. Vamos provar que $L(\mathcal{C}) = L(\mathcal{A})L(\mathcal{B})$

Obs: todo passeio em $G(\mathcal{A})$ ou em $G(\mathcal{B})$ é um passeio em $G(\mathcal{C})$

(⊇) $L(\mathcal{A})L(\mathcal{B}) \subseteq L(\mathcal{C})$

$x \in L(\mathcal{A})L(\mathcal{B})$ $\exists\, u \in L(\mathcal{A})$ e $v \in L(\mathcal{B})$ tal que $x = uv$

$\exists P_1: i_1 \overset{u}{\underset{\mathcal{A}}{\rightsquigarrow}} f_1$. $\exists P_2: i_2 \overset{v}{\rightsquigarrow} f_2$

$\exists$ em $G(\mathcal{C})$ o passeio $P = P_1 (f_1 \xrightarrow{\lambda} i_2) P_2$ com $\|P\| = \|P_1\| \lambda \|P_2\| = uv = x$ e $x \in L(\mathcal{C})$

(⊆) $L(\mathcal{C}) \subseteq L(\mathcal{A})L(\mathcal{B})$

Seja $x \in L(\mathcal{C})$. Então, existe em $G(\mathcal{C})$ um passeio $P: i_1 \overset{x}{\rightsquigarrow} f_2$

$(i_1 \overset{u}{\rightsquigarrow} f_1 (f_1 \xrightarrow{\lambda} i_2) i_2 \overset{v}{\rightsquigarrow} f_2,\ uv = x)$

Como $i_1 \in Q_1$ e $f_2 \in Q_2$, $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ e em $\mathcal{C}$ não existem transições de estados de Q_2 para estados de Q_1 e a única transição de um estado de Q_1 para um estado de Q_2

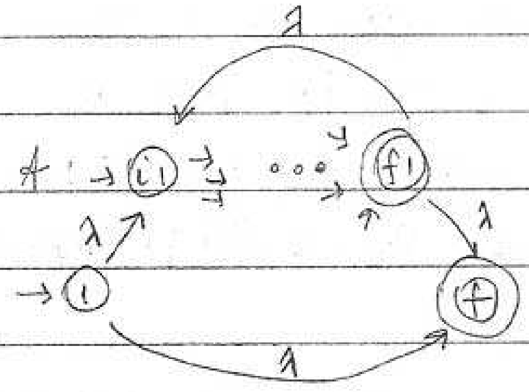
é $f_1 \xrightarrow{\lambda} i_2$, segue que o passeio P deve ser da forma:

$P = i_1 \overset{u}{\rightsquigarrow} f_1 \; (f_1 \xrightarrow{\lambda} i_2) \; i_2 \overset{v}{\rightsquigarrow} f_2$, tal que $uv = x$.

Logo, $i_1 \overset{u}{\rightsquigarrow} f_1$ é um passeio em $G(A)$ e $i_2 \overset{v}{\rightsquigarrow} f_2$ é um passeio em $G(B)$.

Portanto, $u \in L(A)$ e $v \in L(B)$. Assim, $x = uv \in L(A)L(B)$.

3) Estrela



$L(B) = (L(A))^*$

18 / 9 / 8

1.2*) $A(B\cap C) \subseteq AB \cap AC$

$AB \cap AC \subseteq A(\underbrace{B\cap C}_{\emptyset}) \rightarrow F$

$\underbrace{\quad}_{\neq \emptyset} \quad \underbrace{\quad}_{\emptyset}$

• $A(B\cap C) \subseteq AB \cap AC$

Prova: Seja $w \in A(B\cap C)$

Existe uma fatoração com $x \in A$, $y \in B\cap C$ para w (ou seja, $w = xy$).

Note que $y \in B$ e $y \in C$, então, $w = xy \in AB$ e $w \in AC$ $\therefore$ $w \in AB \cap AC$

1.4b) Se $A \subseteq B$, então $A^* \subseteq B^*$

(anterior: Se $A \subseteq B$, então $A^n \subseteq B^n \ \forall n \geq 0$)

$$A^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} B^n = B^*$$

Mas $\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2^i} < 2 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$

$A^* \overset{?}{\subseteq} B^*$

$\lambda \notin \Sigma$ Seja $w \in A^*$, w tem uma fatoração tal que $w = y_1 y_2 \ldots y_n$, $n \geq 0$ e $y_i \in A$, $1 \leq i \leq n$

Se $w = \lambda$ então $w \in B^*$

caso contrário, como para $\forall y_i$, temos $y_i \in A$ e $A \subseteq B$, então $y_i \in B$, e portanto $y_1 y_2 \ldots y_n$ é uma fatoração de w com palavras de B. Então $w \in B^*$

1.4e) $(A \cup B)^* = A^*(BA^*)^*$

$A^*(BA^*)^* \subseteq (A\cup B)^*$

Seja $w \in A^*(BA^*)^*$, então $w = y_1 y_2 \ldots y_n$, $n \geq 0$, onde $y_i \in A^*$ ou $y_i \in (BA^*)^*$

Se $y_i \in A^*$, $y_i \in (A\cup B)^*$

Se $y_i \in (BA^*)^*$, $y_i = x_{i1} x_{i2} \ldots x_{in}$, onde $x_{ij} \in B$ ou $x_{ij} \in A^*$.

$\Downarrow$

$x_{ij} \in (A \cup B)^*$

$(A\cup B)^* \subseteq A^*(BA^*)^*$

estou marcando onde B ocorre na sequência

1. $(A \cup B)^* \subseteq A^*(BA^*)^*$

Seja $x \in (A \cup B)^*$. Vamos mostrar por indução em $|x|$ que $x \in A^*(BA^*)^*$.

se $|x| = 0$, temos que $x = \lambda$ e $\lambda \in A^*(BA^*)^*$

se $|x| > 0$, suponha que o resultado seja válido para palavras menores de $(A \cup B)^*$. Como $x \in (A \cup B)^*$, existem $n > 0$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n \in (A \cup B)$ tal que $x = y_1 \ldots y_n$. Se para todo $1 \le i \le n$ temos que $y_i \in A$, então $x \in A^*$ e como $A^* \subseteq A^*(BA^*)^*$, segue que $x \in A^*(BA^*)^*$

$A^* \; \boxed{k} \; (\underset{\in (A \cup B)^*}{w})$, $\boxed{k} = B$

Caso contrário, seja k o menor índice tal que $y_k \in B$. Seja w tal que $x = y_1 \ldots y_{k-1} y_k w$. Note que $w \in (A \cup B)^*$ já que $w = y_{k+1} \ldots y_n$ e $y_i \in A \cup B$, $k+1 \le i \le n$. Por HI, temos que $w \in A^*(BA^*)^*$, já que $|w| < |x|$. Pela minimalidade de k, temos que $\underbrace{y_1, \ldots, y_{k-1}}_{\alpha} \in A^*$.

sabemos $w \in A^*(BA^*)^*$
$\therefore x \in A^* B A^* (BA^*)^*$
$\therefore x \in A^*(BA^*) \subseteq A^*(BA^*)^*$

Portanto, x é da forma $\alpha y_k w$ e portanto, $x \in A^* B (A^*(BA^*)^*)$, então $x \in A^*(BA^*)^* \subseteq A^*(BA^*)^*$

Prefixo$(L) = \{ x \in \Sigma^* \text{ existe } y \in \Sigma^* \text{ tal que } xy \in L \}$

L é regular $\Rightarrow$ Pref(L) é regular.

Indução no número de operadores de α:

(Seja α uma expressão regular tal que $L = L(\alpha)$)

se $\alpha = \emptyset$ então $p(\emptyset)$ é vazio, $L(p(\alpha)) = \emptyset$.

Como pref$(\emptyset) = \emptyset$, temos o resultado desejado.

Se $\alpha = \sigma$, $\sigma \in \Sigma$, então $p(\sigma) = (\lambda + \sigma)$

Se $\alpha = \lambda$, ...

$\rightarrow$ se $\alpha = A + B$, pref$(L(\overset{\alpha}{A+B})) \overset{?}{=} L(p(\alpha))$

$L(p(\alpha)) = L(p(A) + p(B)) = L(p(A)) + L(p(B)) =$

$\overset{L_2}{\text{pref}(L(A))} + \overset{L_3}{\text{pref}(L(B))} \overset{?}{=} \overset{L_1}{\text{pref}}(L(A) + L(B))$ HI HI

$\subseteq$ óbvio

$\text{pref}(L(A+B))$ ⟵ def exp reg

$x \in L_1$, $x \notin L_2 \cup L_3$

$\exists y$, $xy \in L(A)$ ou $xy \in L(B)$

Definição de p:

$\emptyset^* = \lambda$

$\emptyset$: $p(\emptyset) = \emptyset$, λ: $p(\lambda) = \lambda$

σ: $p(\sigma) = (\lambda + \sigma)$

$A+B$: $p(A+B) = p(A) + p(B)$

AB: $p(AB) = p(A) + Ap(B)$?

$A = \{a, ac\} = \lambda, a, ac$

$B = \{b\} = \lambda, b$

$AB = \{acb\}$

$\text{pref}(AB) = \lambda, a, ac, acb, ab\}$

se $A = \emptyset \Rightarrow AB = \emptyset \Rightarrow p(AB) = \emptyset$ & $p(A) = \emptyset$ & $Ap(B) = \emptyset$

se $B = \emptyset \Rightarrow p(AB) = \emptyset$, $p(A) \neq \emptyset$ e $Ap(B) = \emptyset$

$A^* \rightarrow p(A^*) = A^* p(A) = A^*(p(A) + \lambda)$

se $A = \emptyset$

$\emptyset^* = \lambda \Rightarrow p(A^*) = \lambda$, mas $A^* p(A) \neq \emptyset$

spiral

Se $\alpha = A^*$, $pref(L(A^*)) \overset{?}{=} L(p(A^*)) = L(A^*(p(A)+\lambda))$

Seja $x \in pref(L(A^*))$, existe $y \in \Sigma^*$ tal que $xy \in A^*$

$x \in L(A^*(p(A)+\lambda))$.

$L(A^*) \subseteq L(A^*(p(A)+\lambda))$

$L(A^*) = L(A^*(+\lambda))$

Se $y = \lambda$ $\quad x \in L(A^*(p(A)+\lambda))$

Se $y \in A^*$, $xy \in A^* \rightarrow x \in A^* w$

$\therefore vw \in A \Rightarrow v \in pref(A)$

Como $A \in A^* \rightarrow v \in pref(A^*)$

$x = \underbrace{y_1 y_2 \dots y_k}_{\in A} \underbrace{v}_{pref\, A}$

Por HI $p(A)$ representa $pref(A)$

Seja $x \in pref$ ...

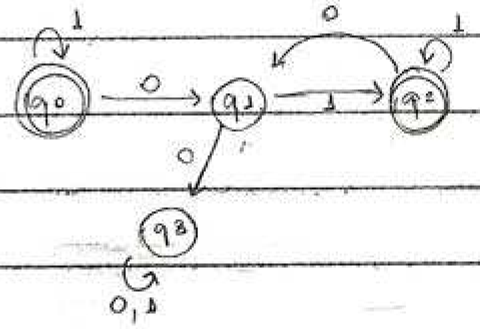
e se ñ $\exists x$? e se fosse vazio?

$pref(\emptyset) = \lambda$

$L(A^*(p(A)+\lambda)) = L(A^*(\underbrace{p(A)}_{\text{pode ser } = \emptyset})) + L(A^*)$

3.3 c)

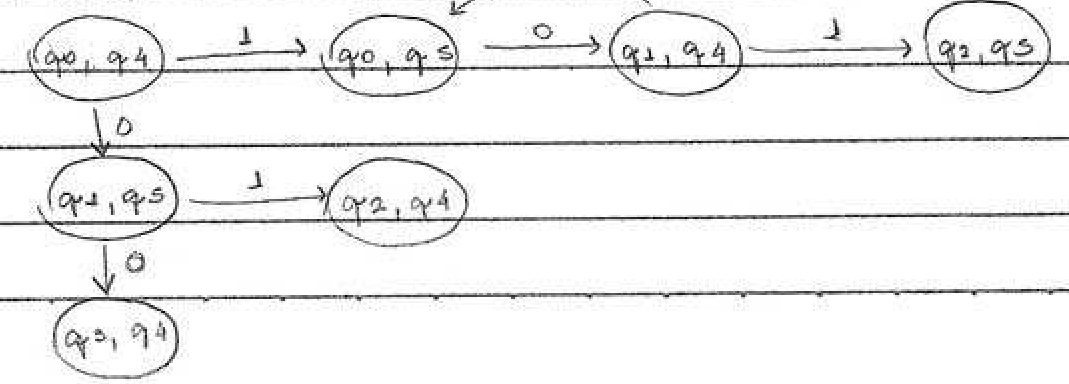
L_1:

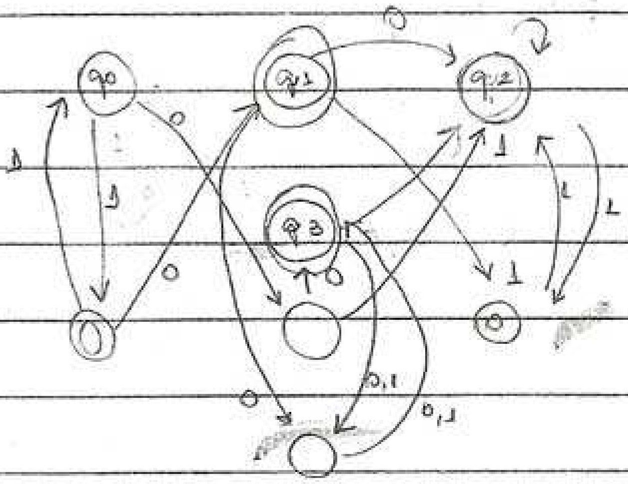


L_2:

$(L_1 \cup L_2) \setminus (L_1 \cap L_2)$

$(1^*(01^*)^*) \cup (|x| \text{ é par}) \setminus (1^*(01^*)^*) \cap (|x| \text{ é par})$





dobro L_1 e X