2 / 9 / 8

Produto Direto

$\mathcal{A} = (Q_A, \Sigma, \delta_A)$ e $\mathcal{B} = (Q_B, \Sigma, \delta_B)$

$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = (Q_A \times Q_B, \Sigma, \delta)$, $\delta : (Q_A \times Q_B) \times \Sigma \to Q_A \times Q_B$

$\delta((p,q),\sigma) = (\delta_A(p,\sigma), \delta_B(q,\sigma))$ ⇝ andar nos dois autômatos ao mesmo tempo

$\hat{\delta}((p,q),x) = (\hat{\delta}_A(p,x), \hat{\delta}_B(q,x))$

Lema 8: Rec(Σ) é fechada por intersecção

Prova: Sejam L_1 e L_2 $\in$ Rec(Σ)
Então existem afd $\mathcal{A} = (Q_A, \Sigma, \delta_A, s_A, F_A)$ e $\mathcal{B} = (Q_B, \Sigma, \delta_B, s_B, F_B)$ tais que $L_1 = L(\mathcal{A})$ e $L_2 = L(\mathcal{B})$
Considere o afd $\mathcal{C} = (Q_A \times Q_B, \Sigma, \delta, (s_A, s_B), F_A \times F_B)$, onde δ é a função de transição do produto direto dos semi-autômatos correspondentes aos autômatos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Vamos provar que: $L(\mathcal{C}) = L_1 \cap L_2$

Seja $x \in \Sigma^*$, $x \in L(\mathcal{C}) \iff \delta((s_A, s_B), x) \in F_A \times F_B$

Prop 7 $\iff (\delta_A(s_A,x), \delta_B(s_B,x)) \in F_A \times F_B$

$\iff \delta_A(s_A,x) \in F_A$ e $\delta_B(s_B,x) \in F_B$

$\iff x \in L(\mathcal{A})$ e $x \in L(\mathcal{B})$

$\iff x \in L_1$ e $x \in L_2$

$\iff x \in L_1 \cap L_2$ ∴ $L_1 \cap L_2 \in$ Rec(Σ).

Lema 9: Rec(Σ) é fechada por união, diferença e diferença simétrica

Prova: L_1 e L_2 $\in$ Rec(Σ)

(I) $L_1 \cup L_2 = (\overline{L}_1 \cap \overline{L}_2)$

(II) $L_1 - L_2 = L_1 \cap \overline{L}_2$

$L_1 \Delta L_2 = (L_1 \cup L_2) - (L_1 \cap L_2) = (L_1 - L_2) \cup (L_2 - L_1)$

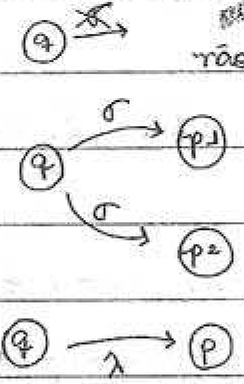
Como Rec(Σ) é fechado para $\cap$ e complemento, também é fechado para $\cup$ (I) e para diferença (II) e finalmente para Δ

IV) Autômatos finitos não-determinísticos

É uma quíntupla $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ onde:

- Q é um conjunto não-vazio de *estados*,
- Σ é um *alfabeto* (de entrada),
- $s \in Q$ é o *estado inicial*,
- $F \subseteq Q$ é o conjunto de *estados finais* e
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \rightarrow 2^{Q}$ é a função de transição

Podemos ter:



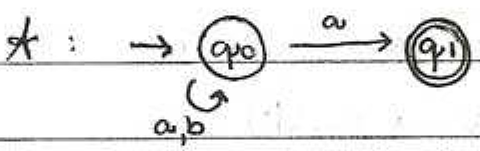
não há transição de q com o rótulo σ

tem A de uma transição de q com rótulo σ

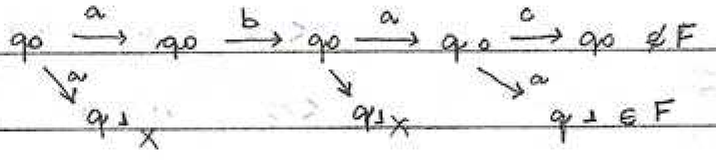
tem transição rotulada com λ

Exemplo 1: $L = \{x \in \{a,b\}^* : x \text{ termina por } a\}$

$\mathcal{A}$:

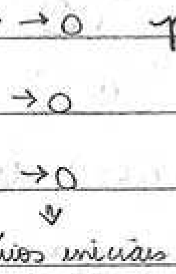


simulando com x = abaa

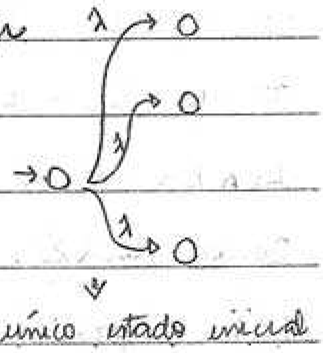


x é aceita por $\mathcal{A}$ porque existe uma sequência de movimentos que leva do estado inicial para algum estado final e que lê a palavra x todinha.

Observação: Definir um único estado inicial é equivalente a definir um subconjunto de estados iniciais, pois se tiver:



posso fazer



Uma *configuração* num afnd $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ é um par (q, x) em $Q \times \Sigma^*$, onde q é o estado atual e x a parte não lida da entrada

δ estados	símbolos a	 b	 λ
q0	{q0,q1}	q0	∅
q1	∅	∅	∅

Relacionando duas configurações em um afnd $\mathcal{A}$

$(p, x) \vdash_{\mathcal{A}} (q, y)$ se e somente se $\begin{cases} x = y \text{ e } q \in \delta(p, \lambda) & \textcircled{p} \xrightarrow{\lambda} \textcircled{q} \\ \text{ou} & \\ \exists \sigma \in \Sigma \text{ tal que } x = \sigma y \text{ e } q \in \delta(p, \sigma) & \textcircled{p} \xrightarrow{\sigma} \textcircled{q} \end{cases}$

Uma palavra $x \in \Sigma^*$ é *aceita* por um afnd $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ se $(s, x) \vdash^*_{\mathcal{A}} (\underset{\substack{\downarrow \\ \text{terminou de ler } x}}{q, \lambda})$, para algum $q \in F$

A *linguagem aceita* por um afnd $\mathcal{A}$ é $L(\mathcal{A}) = \{x \in \Sigma^* : x \text{ é aceita por } \mathcal{A}\}$

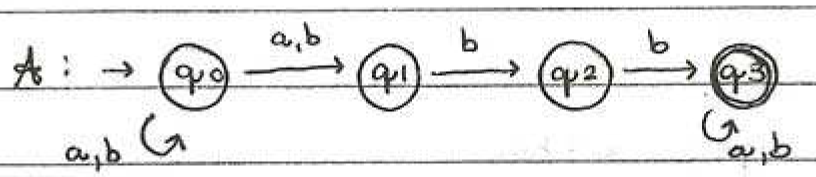
Notação: $NRec(\Sigma)$ é a família de todas as linguagens aceitas por afnd.

Proposição 1: Seja $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ um afnd. $\forall\, p, q \in Q$, $\forall\, x, y \in \Sigma^*$, existe em $G(\mathcal{A})$ um passeio $P: p \overset{x}{\longmapsto} q$ se e somente se $(p, xy) \vdash^*_{\mathcal{A}} (q, y)$

Corolário 2: Seja $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ um afnd

$L(\mathcal{A}) = \{x \in \Sigma^* : \text{existe em } G(\mathcal{A}) \text{ um passeio } P: s \overset{x}{\longmapsto} q \text{, para algum } q \in F\}$

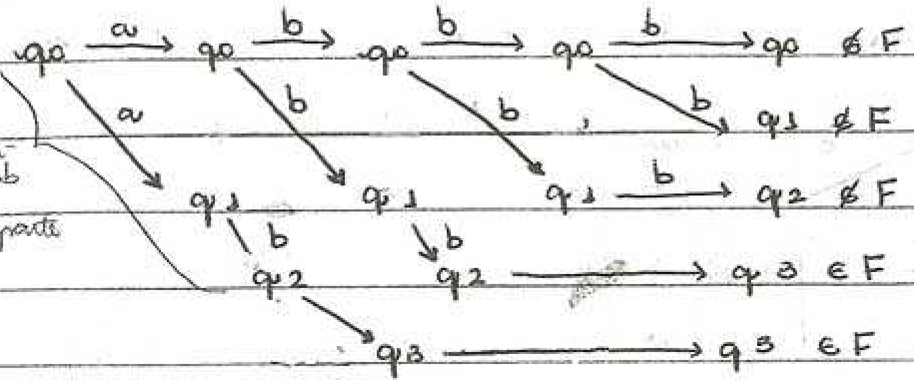
Exemplo 2: $L = \{a,b\}^+ \{bb\} \{a,b\}^*$



δ estados	símbolos a	 b	 λ
q0	{q0,q1}	{q0,q1}	∅
q1	∅	{q2}	∅
q2	∅	{q3}	∅
q3	{q3}	{q3}	∅

Lembrando: A imagem da função δ é um conjunto

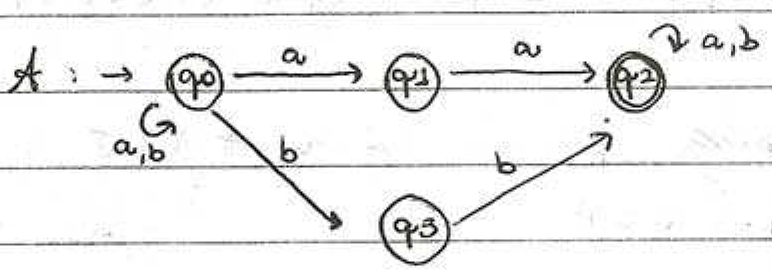
Simulando para x = abbb



a palavra ab não faz parte

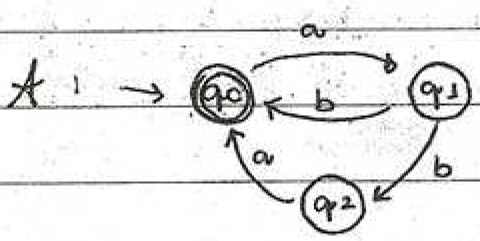
Há 2 passos que levam do estado inicial ao final lendo toda palavra

Exercício 3: $L = \{x \in \{a,b\}^* : aa$ ou bb é fator de $x\}$

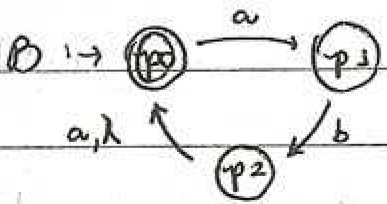


δ estados	símbolos a	 b	 λ
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_3\}$	∅
q_1	$\{q_2\}$	∅	∅
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$	∅
q_3	∅	$\{q_2\}$	∅

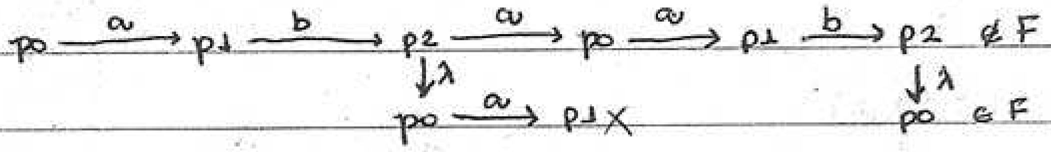
Exercício 4: $L = \{ab, aba\}^*$



ou



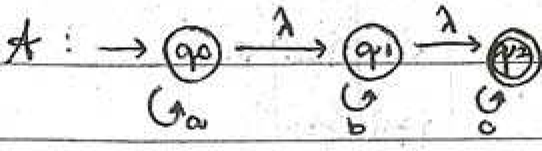
Simulando em B para x = abaab

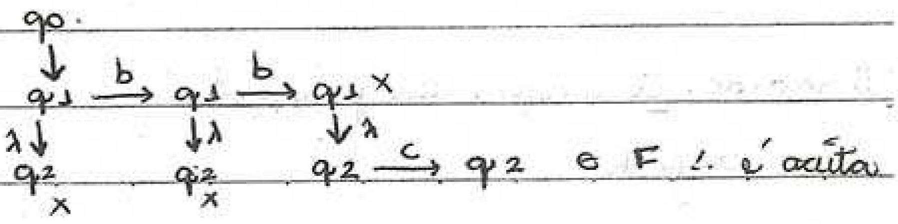


∴ x é aceita

Exemplo 5: $L(a^* b^* c^*)$ → é uma expressão regular

para x = bbc





∴ é aceita