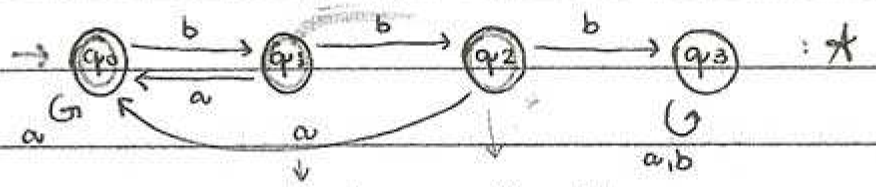
28 / 8 / 8

1º exercício

Escreva expressões regulares para cada uma das linguagens nos Exemplos 1 a 10
de linguagem reconhecíveis

(10) $L = \{x \in \{a,b\}^* : bbb$ não é fator de $x\}$



... a   ... ab ou b   ... abb ou bb

Propriedades:

(1) $\forall x \in \{a,b\}^*$

$\delta(q_0, x) = q_3$ se e somente se x tem fator bbb

(2) $\forall x \in \{a,b\}^*$

$\delta(q_0, x) = q_i$, $i \in \{0,1,2\}$ se e somente se $x = b^i$ ou $x = y\,a\,b^i$, para $y \in \{a,b\}^*$ e y não tem fator bbb

se eu provar as propriedades provo $L \overset{?}{=} L(A)$

(?) $\overline{L} \subseteq \overline{L(A)}$

Seja $x \in \overline{L}$. Então x tem fator bbb; ou seja, $x = u\,bbb\,\sigma$, para u e σ em $\{a,b\}^*$.

Logo, $\delta(q_0, x) = \delta(q_0, u\,bbb\,\sigma) = \delta(\underbrace{\delta(q_0, u)}_{\in \{q_0, q_1, q_2, q_3\} = p}, bbb\,\sigma)$

$= \delta(\delta(p, bbb), \sigma)$

por construção do autômato A

$= \delta(q_3, \sigma) = q_3 \notin F$

Portanto, $x \notin L(A)$

(?) $L \subseteq L(A)$

Vamos provar que $\forall x \in \{a,b\}^*$, se $x \in L$ então $x \in L(A)$, por indução no $|x|$

Base: $|x| = 0$, então $x = \lambda$. Logo, $\delta(q_0, x) = \delta(q_0, \lambda) = q_0 \in F$. Portanto, $\lambda \in L(A)$.

Seja $n \geq 0$. HI: Suponha que $\forall x \in \{a,b\}^*$, se $x \in L$ e $|x| \leq n$, então $x \in L(A)$.

Passo: Seja $x \in \{a,b\}^*$, com $|x| = n+1$. Então, $x = y\sigma$, para $\sigma \in \Sigma$ e $y \in \{a,b\}^*$

spiral

Suponha que $x \in L$, x não tem fator bbb. Logo, y não pode ter fator bbb, e segue que $y \in L$.

Como $|y| = n$ e $y \in L$, pela HI resulta que $y \in L(A)$. Logo,

$\delta(q_0, y) \in F = \{q_0, q_1, q_2\}$

→ se $\delta(q_0, y) = q_0$, então

$\delta(q_0, x) = \delta(q_0, y\sigma) = \delta(\delta(q_0, y)\sigma) = \delta(q_0, \sigma) \in \{q_0, q_1\} \subseteq F$. Logo, $x \in L(A)$

→ se $\delta(q_0, y) = q_1$, então

$\delta(q_0, x) = \delta(q_0, y\sigma) = \delta(\delta(q_0, y), \sigma) = \delta(q_1, \sigma) \in \{q_0, q_2\} \subseteq F$. Logo, $x \in L(A)$

→ se $\delta(q_0, y) = q_2$, então por construção de A, segue que $y = ubb$ p/ alguma palavra u em $\{a,b\}^*$.

u ñ tem bbb ~~pq~~ $y \in L$

$\delta(q_0, x) = \delta(q_0, y\sigma) = \delta(\delta(q_0, y), \sigma) = \delta(q_2, \sigma)$

Como $x = y\sigma = ubb$ e x não tem fator bbb, segue que $\sigma = a$ e $\delta(q_2, \sigma) = \delta(q_2, a) = q_0 \in F$.

Logo, $x \in L(A)$.

Dois a.f.d A e B são *equivalentes* se $L(A) = L(B)$.

Teorema de Kleene (1956): $Rec(\Sigma) = Reg(\Sigma)$

Prova: $Reg(\Sigma) \subseteq Rec(\Sigma)$: algoritmo que dada uma expressão regular α sobre Σ, constrói um afd A tal que $L(A) = L(\alpha)$.

$Rec(\Sigma) \subseteq Reg(\Sigma)$: algoritmo que dado um afd A, determina uma exp. reg. α tal que $L(\alpha) = L(A)$

Reg é fechado p/ ∪ · * inverso

∩? complemento?

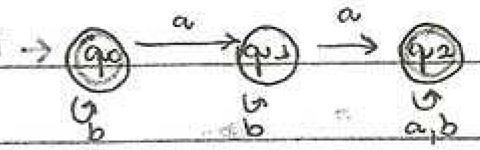
Operações Booleanas com linguagens reconhecíveis: (união, intersecção, complemento, diferença, diferença simétrica)

Exemplo: $\Sigma = \{a, b\}$ $\quad L = \{x \in \Sigma^* : |x|_a = 1\} = L(A)$

A:

Será que $\overline{L}$ é reconhecível?

B:



$L(B) = \overline{L}$

Lema 6: $Rec(\Sigma)$ é fechado por complemento.

Prova

Seja $L \in Rec(\Sigma)$. Então, existe um a.f.d. $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ tal que $L(A) = L$. Considere o a.f.d. $B = (Q, \Sigma, \delta, s, Q - F)$.

Seja $x \in \Sigma^*$.

$x \in L(B)$ se e somente se $\delta(s, x) \in Q - F$.

se e somente se $\delta(s, x) \notin F$

se e somente se $x \notin L(A)$

se e somente se $x \notin L$

se e somente se $x \in \overline{L}$ $\therefore$ $\overline{L} \in Rec(\Sigma)$

Exemplo: $\Sigma = \{a, b\}$ $L = \{x \in \Sigma^* : |x|_a$ é par e $|x|_b$ é ímpar$\}$

Será que L é reconhecível?

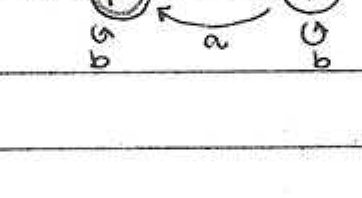
Considere as linguagens $L_1 = \{x \in \Sigma^* : |x|_a$ é par$\} = L(A)$

$L_2 = \{x \in \Sigma^* : |x|_b$ é ímpar$\} = L(B)$

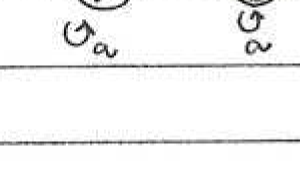
$L = L_1 \cap L_2$

Será que $L_1 \cap L_2$ é reconhecível?

A:



B:



| / / |

não importa estado final ou inicial

O produto direto de dois semi-autômatos $A = (Q_A, \Sigma, \delta_A)$ e $B = (Q_B, \Sigma, \delta_B)$ é o semi-autômato $A \times B = (Q_A \times Q_B, \Sigma, \delta)$, onde $\forall p \in Q_A$, $\forall q \in Q_B$, $\forall \sigma \in \Sigma$, $\delta((p,q),\sigma) = (\delta_A(p,\sigma), \delta_B(q,\sigma))$

Podemos estender δ para $\hat{\delta} : (Q_A \times Q_B) \times \Sigma^* \to (Q_A \times Q_B)$ da seguinte forma:

- $\hat{\delta}((p,q),\lambda) = (p,q)$, $\forall p \in Q_A$, $\forall q \in Q_B$ e
- $\hat{\delta}((p,q),x\sigma) = \delta(\hat{\delta}((p,q),x),\sigma)$, $\forall p \in Q_A$, $\forall q \in Q_B$, $\forall x \in \Sigma^*$, $\forall \sigma \in \Sigma$

Proposição 7: $\forall x \in \Sigma^*$, $\forall (p,q) \in Q_A \times Q_B$, $\hat{\delta}((p,q),x) = (\hat{\delta}_A(p,x), \hat{\delta}_B(q,x))$.

Prova: prove por indução no $|x|$