26 / 8 / 8

Alguns Exemplos de Linguagens Reconhecíveis

① $\emptyset = L$

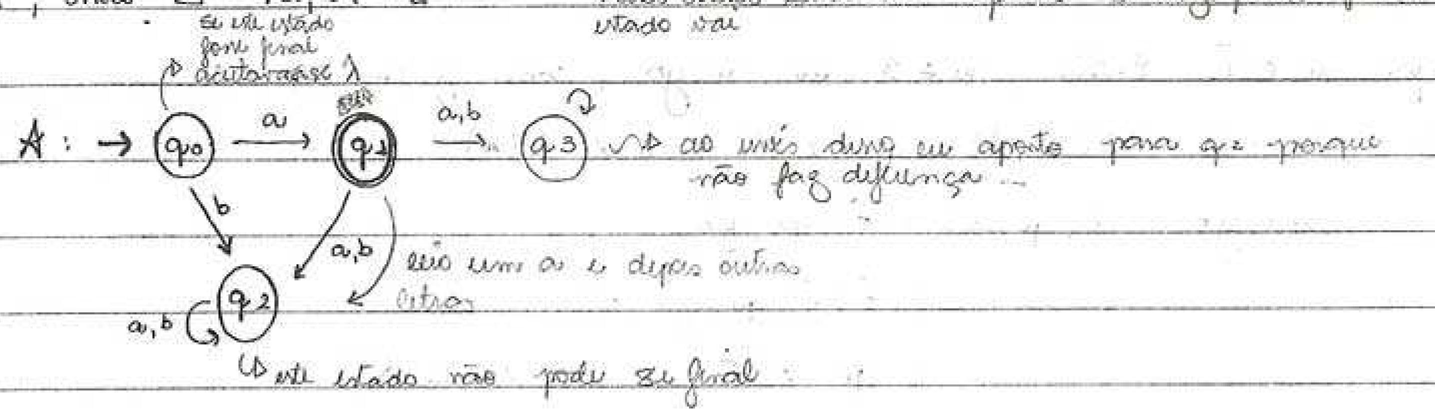
② $\Sigma^* = L$

③ $\{\lambda\} = L$

④ $\Sigma^+ = L$

⑤ $\{a\}$, onde $\Sigma = \{a, b\} = L$ — Para cada letra do alfabeto se diz para qual estado vai

Prova:

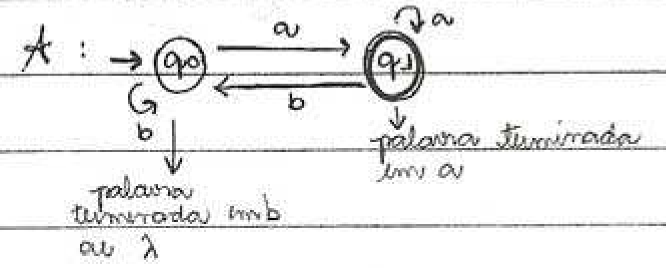


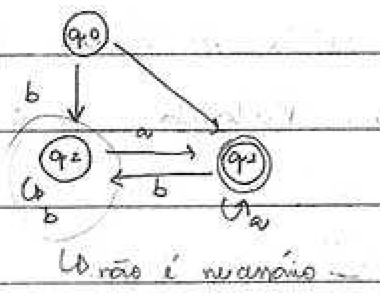
- $\delta(q_0, \lambda) = q_0 \notin F \Rightarrow \lambda \notin L(A)$
- $\delta(q_0, a) = q_1 \in F \Rightarrow a \in L(A)$
- $\delta(q_0, b) = q_2 \notin F \Rightarrow b \notin L(A)$
- $x \in \Sigma^*$ tal que $|x| \geq 2$. Então $x = \sigma_1 \sigma_2 y$, para σ_1 e σ_2 em Σ e y em Σ^*

$\delta(q_0, x) = \delta(q_0 \sigma_1 \sigma_2 y) = \delta(\delta(q_0 \sigma_1 \sigma_2), y) = \delta(q_2, y) = q_2 \notin F$

Logo, $\forall x \in \Sigma^*$, com $|x| \geq 2$, $x \notin L(A)$

⑥ $\{x \in \{a, b\}^* \mid x$ termina em $a\} = L$





Prova $= L \overset{?}{=} L(A)$

(?) $L \subseteq L(\mathcal{A})$

Seja $x \in L$. Então $x = ya$, com $y \in \{a,b\}^*$. Logo,

$$\begin{aligned}\delta(q_0, x) &= \delta(q_0, ya)\\ &= \delta(\underbrace{\delta(q_0, y)}_{\in \{q_0, q_1\}}, a)\\ &= q_1 \in F\end{aligned}$$

Portanto, $x \in L(\mathcal{A})$

⇒ é possível fazer isso porque somente olhando o autômato é fácil de enxergar

(?) $L(\mathcal{A}) \subseteq L$ $\left(\equiv \overline{L} \subseteq \overline{L(\mathcal{A})}\right)$ ⇝ $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$

Seja $x \in \overline{L}$. Então, $x = \lambda$ ou $x = yb$, com y em $\{a,b\}^*$

$x = \lambda$: $\delta(q_0, \lambda) = q_0 \notin F \Rightarrow \lambda \notin L(\mathcal{A})$

$$\begin{aligned}x = yb: \ \delta(q_0, x) &= \delta(q_0, yb)\\ &= \delta(\underbrace{\delta(q_0, y)}_{\in \{q_0, q_1\}}, b)\\ &= q_0 \notin F \quad \therefore x \notin L(\mathcal{A})\end{aligned}$$

Outra Prova:

estados $q_0 \neq q_1$, então o passeio é maior do que zero

$q_0 \overset{y}{\vdash\!\!\sim\!\!\rightarrow} r \xrightarrow{\sigma} q_1 \Rightarrow x = y\sigma$

estado qualquer q_0 ou q_1 ⇒ se q_1 ⇒ termina por a

(?) $L(\mathcal{A}) \subseteq L$

Seja $x \in L(\mathcal{A})$. Então existe um passeio P: $q_0 \overset{x}{\vdash\!\!\sim\!\!\rightarrow} q_1$. Como $q_0 \neq q_1$, temos que $|P| > 0$. Logo, podemos fatorar o passeio P da seguinte forma:

P: $q_0 \overset{y}{\vdash\!\!\sim\!\!\rightarrow} r \xrightarrow{\sigma} q_1$, para algum $r \in \{q_0, q_1\}$, $y \in \{a,b\}^*$, $\sigma \in \Sigma$ tal que $x = y\sigma$.

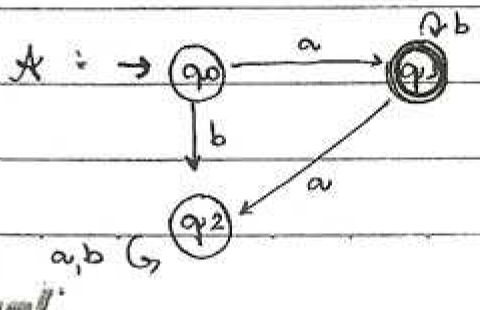
Por construção do autômato $\mathcal{A}$, todas arestas com término em q_1 têm como rótulo o símbolo a. Segue então que $\sigma = a$. Logo, $x = y\sigma = ya$ termina por a. Portanto, $x \in L$.

⑦ $\{ab^n, n \geq 0\} - L$

$L \subseteq L(\mathcal{A})$?

$\overline{L} \subseteq \overline{L(\mathcal{A})}$?

$\mathcal{A}$:



$x \in L$, então $x = \lambda$ ou

$x = by$, $y \in \{a,b\}^*$ ou

$x = ay$, $y \in \{a,b\}^*$, com $|y|_a > 0$

spiral

⑧ $\{x \in \{a,b\}^* : |x|_a = 1\} = L$

$L \stackrel{?}{=} L(A)$

$(?)\ L \subseteq L(A)$

$A:$

$x \in L$

$x = uav\ ,\ u, v \in \{b\}^*$

Em termos de passos: $x \in L(A)$

$(?)\ \overline{L} \subseteq \overline{L(A)}$

$P:\ q_0 \overset{x}{\vdash\!\!\leadsto} q_1$

$x \in \overline{L}$

$P:\ q_0 \overset{u}{\vdash\!\!\leadsto} q_0 \xrightarrow{a} q_1 \overset{v}{\vdash\!\!\leadsto} q_1$

só pode terminar assim

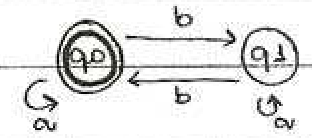
$|x|_a = 0$ ou $|x|_a \geq 2$

$x \in \{b\}^*$ $\quad x = uavaw$ (u e $v = b^*$ e $w \in \{a,b\}^*$)

u e v então tem que estar em $\{b\}^*$

⑨ $\{x \in \{a,b\}^* : |x|_b$ é par$\} = L$

$A:$



zero é par...

$L \stackrel{?}{=} L(A)$

$\delta(q_0, x) = q_0$, se $|x|_b$ é par

q_1, se $|x|_b$ é ímpar

$\Downarrow$

$q_{|x|_b \bmod 2}$

Propriedade: $\forall x \in \{a,b\}^*,\ \delta(q_0, x) = q_{|x|_b \bmod 2}$

Prova por indução no $|x|$

→ Base: $|x| = 0$: então $x = \lambda$. Logo, $\delta(q_0, x) = \delta(q_0, \lambda) = q_0$

$q_0 = q_{|\lambda|_b \bmod 2}$

Seja $n \geq 0$

→ HI: Suponha que $\forall x \in \{a,b\}^*$, com $|x| \leq n$, $\delta(q_0, x) = q_{|x|_b \bmod 2}$

→ Passo: Seja $x \in \{a,b\}^*$, com $|x| = n+1$. Então $x = y\sigma$, para $\sigma \in \{a,b\}$ e $y \in \{a,b\}^*$

$\delta(q_0, x) = \delta(q_0, y\sigma) = \delta(\delta(q_0, y), \sigma)$.

Como $|y| = n$, pela HI temos $\delta(q_0, y) = q_{|y|_b \bmod 2}$.

Logo, $\delta(q_0, x) = \delta(q_{|y|_b \bmod 2}, \sigma)$. $\quad$ se $\sigma = a$ $\quad \delta(q_0, x) = q_{|y|_b \bmod 2}$

se $\sigma = b$ $\quad \delta(q_0, x) = q_{(|y|_b + 1) \bmod 2}$

Mas $x = \sigma y$. Então: $|x|_b = \begin{cases} |y|_b, & \text{se } \sigma = a \\ |y|_b + 1 & \text{se } \sigma = b \end{cases}$. Portanto, $\delta(q_0, x) = q_{|x|_b \bmod 2}$ ∎

Seja $x \in \{a,b\}^*$, $x \in L \Leftrightarrow |x|_b$ é par

$\Leftrightarrow |x|_b \bmod 2 = 0$

$\Leftrightarrow \delta(q_0, x) = q_0$

$\Leftrightarrow x \in L(A)$

spiral