AUTÔMATOS

27/8 40

O fecho reflexivo e transitivo de $\vdash_A$, denotado por $\vdash_A^*$ "produz", é tq $(p, x) \vdash_A^* (q, y)$ em $k \geq 0$ passos sse existe uma seqüência de $k+1$ configurações

$(p_0, x_0) = (p, x), (p_1, x_1), \dots, (p_k, x_k) = (q, y)$ tq $\forall i, 1 \leq i \leq k, (p_{i-1}, x_{i-1}) \vdash_A (p_i, x_i)$

- Uma palavra $x \in \Sigma^*$ é aceita por um a.f.d. $A = (Q, \Sigma, \delta, r, F)$ se $(r, x) \vdash_A^* (q, \lambda)$, p/ algum $q \in F$. Caso contrário, A rejeita x

- A linguagem aceita (ou reconhecida) por A é $L(A) = \{x \in \Sigma^* : x$ é aceita por A$\}$
$= \{x \in \Sigma^* : (r, x) \vdash_A^* (q, \lambda)$, p/ algum $q \in F\}$

- Uma linguagem $L \subseteq \Sigma^*$ é reconhecível se existe um a.f.d. A tq $L = L(A)$

- Notação: Rec (Σ) é a família de todas as linguagens reconhecidas sobre Σ.

– Seja $A = (Q, \Sigma, \delta, r, F)$ um afd.

Vamos ~~supor~~ estender a função de transição $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ p/ uma função $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$ da seguinte forma:

$$\hat{\delta}(q, \lambda) = q \text{ p/ todo } q \in Q$$

$$\delta(q\, x\sigma) = \delta(\hat{\delta}(q, x), \sigma), \forall q \in Q, \forall x \in \Sigma^*, \forall \sigma \in \Sigma$$

<u>Exemplo</u>:

$$\hat{\delta}(q_0, abba) = \delta(\delta(q_0, abb), a)$$
$$= \delta(\delta(\hat{\delta}(q_0, ab), b), a)$$
$$= \delta(\delta(\delta(\hat{\delta}(q_0, a), b), b), a)$$
$$= \delta(\tilde{\hat{\delta}}(\delta)\ \underbrace{\delta(\underbrace{\hat{\delta}(q_0, \lambda)}_{q_0}, a)}_{q_0}, b), b), a) = q_0$$

...

abba é aceita por A

Obs.: 1) $\hat{\delta}$ coincide com δ em Σ

2) Vamos escrever δ ao invés de $\hat{\delta}$

$\forall q \in Q, \forall \sigma \in \Sigma,$

$$\hat{\delta}(q, \sigma) = \hat{\delta}(q, \lambda\sigma) \overset{\text{def } \hat{\delta}}{=} \delta(\hat{\delta}(q, \lambda), \sigma) \underset{\text{def } \delta}{=} \delta(q, \sigma)$$

<u>Proposição 1</u>: Seja $A = (Q, \Sigma, \delta, r, F)$ a F d

$\forall q \in Q, \forall x, y \in \Sigma^*$,

$\delta(q, xy) = \delta(\delta(q, x), y)$

Prova: por indução no $|y|$

<u>Proposição 2</u>: Seja $A = (Q, \Sigma, \delta, r, F)$ um afd $\forall p, q \in Q, \forall x, y \in \Sigma^*$, $(p, xy) \vdash_A^* (q, y)$ sse δ ~~se~~ $(p, x) = q$

$(\Rightarrow)$ (?) $\forall p, q \in Q, \forall x, y \in \Sigma^*$, se $(p, xy) \vdash_A^* (q, y)$ em $n \geq 0$ passos, então $\delta(p, x) = q$. (Passo por indução em n)

$(\Leftarrow)$ (?) $\forall p, q \in Q, \forall x \in \Sigma^*$, se $\delta(p, x) = q$ então $\forall y \in \Sigma^*$, $(p, xy) \vdash_A^* (q, y)$

(Prove por indução no $|x|$)

Corolário 3: Seja $A = (Q, \Sigma, \delta, r, F)$ um afd. Então, $L(A) = \{x \in \Sigma^* : \delta(r, x) \in F\}$

<u>Prova</u>: $L(A) = \{x \in \Sigma^* : x$ é aceita por $A\}$

$= \{x \in \Sigma^* : (r, x) \vdash_A^* (q, \lambda)$, p/ algum $q \in F\}$ $= \{x \in \Sigma^* : \delta(r, x) = q$, p/ algum $q \in F\}$

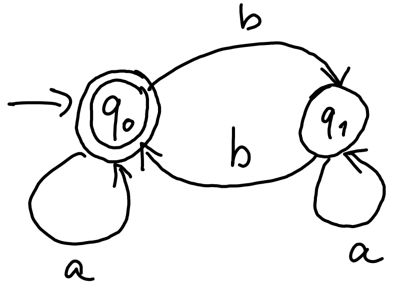
Prop. 2 $= \{x \in \Sigma^* : \delta(r, x) \in F\}$

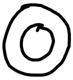
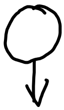
- O <u>grafo</u> de um afd $A = (Q, \Sigma, \delta, r, F)$, denotado por $G(A)$, é o grafo orientado e rotulado com 21/8 43

$$V\,G = Q$$

$$aG = \{(p, \sigma, q) : p, q \in Q,\ \sigma \in \Sigma \text{ e } \delta(p, \sigma) = q\}$$

<u>Exemplo</u>: A



 ou  : estado final

- Um <u>passeio</u> em $G(A)$ é uma seq de $n \geq 0$ arestas consecutivas $P = (p_0, \sigma_1, p_1)(p_1, \sigma_2, p_2) \dots (p_{n-1}, \sigma_n, p_n)$, com comprimento: $|P| = n$, origem p_0, término p_n, rótulo $\|P\| = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$

<u>Notação simplificada</u>

$$P : p_0 \overset{x}{\rightsquigarrow} p_n, \text{ onde } x = \sigma_1 \dots \sigma_n$$

(dizemos que P soletra x).

- Obs.: Um passeio de comprimento zero (não tem aresta), chamado de <u>passeio trivial</u>, é um passeio com origem = término = q, $\forall q \in Q$, e rótulo λ

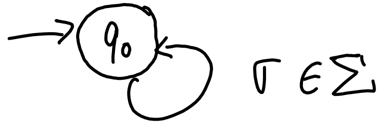
- Sejam $P = (p_0, \sigma_1, p_1) \dots (p_{n-1}, \sigma_n, p_n)$ e $Q = (q_0, \tau_1, q_1) \dots (q_{m-1}, \tau_m, q_m)$ dois passeios em $G(A)$, com $q_0 = p_n$.
A <u>concatenação dos passeios</u> P e Q é o passeio $PQ = (p_0, \sigma_1, p_1) \dots (p_{n-1}, \sigma_n, p_n)(q_0, \tau_1, q_1) \dots (q_{m-1}, \tau_m, q_m)$ com $|PQ| = |P| + |Q| = n + m$ e $\|PQ\| = \|P\|\|Q\| = \sigma_1 \dots \sigma_n \tau_1 \dots \tau_m$

<u>Proposição 4</u>: Seja $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ um a.f.d. $\forall p, q \in Q$, $\forall x \in \Sigma^*$, existe em $G(A)$ um passeio $P: p \overset{x}{\rightsquigarrow} q$ sse $\delta(p, x) = q$
($\Rightarrow$) ind no $|P|$
($\Leftarrow$) ind no $|x|$

<u>Corolário 5</u>: Seja $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ um a.f.d. Então, $L(A) = \{x \in \Sigma^* : \text{existe em } G(A) \text{ um passeio } P: s \rightsquigarrow q, \text{ p/ algum } q \in F\}$
Prova: Segue do Corolário 3 e da proposição 4.

Alguns exemplos de linguagens reconhecíveis

1) $\emptyset$

A: 

$\forall x \in \Sigma^*$ $\delta(q_0, x) = q_0 \notin F$. Logo, $\forall x \in \Sigma^*$, $x \notin L(A)$. Portanto $L(A) = \emptyset$

2) Σ^*

A: 

3) $\{\lambda\}$

A: 

$\delta(q_0, \lambda) = q_0 \in F \therefore \lambda \in L(A)$

- Seja $x \in \Sigma^*$, $x \neq \lambda$, Então, $x = \sigma y$, p/ $\sigma \in \Sigma$ e $y \in \Sigma^{\cancel{*}+}$

Logo,
$$\begin{aligned} \delta(q_0, x) &= \delta(q_0, \sigma y) \\ &= \delta(\delta(q_0, \sigma), y) \\ &= \delta(q_1, y) \\ &= q_1 \notin F \end{aligned}$$

$\therefore \forall x \in \Sigma^+$, $x \notin L(A)$

4) $\Sigma^+ = \Sigma^* - \{\lambda\}$ 21/8 $\lfloor 46$

A: