O fecho reflexivo e transitivo de $\vdash_{A}$, denotado por $\vdash_{A}^{*}$, é tal que $(p,x) \underset{\text{"produz"}}{\vdash_{A}^{*}} (q,y)$ em $k \geq 0$ passos se e somente se existe uma sequência de $k+1$ configurações $(p_0,x_0)=(p,x), (p_1,x_1), \ldots, (p_k,x_k)=(q,y)$ tal que $\forall i,\ 1 \leq i \leq k,\ (p_{i-1},x_{i-1}) \vdash_{A} (p_i,x_i)$.

Uma palavra $x \in \Sigma^*$ é aceita por um a.f.d. $A=(Q,\Sigma,\delta,s,F)$ se $(s,x) \vdash_{A}^{*} (q,\lambda)$, para algum $q \in F$. Caso contrário, A rejeita x.

A linguagem aceita (ou reconhecida) por A é

$L(A) = \{x \in \Sigma^* : x$ é aceita por $A\} = \{x \in \Sigma^* : (s,x) \vdash_{A}^{*} (q,\lambda)$ para algum $q \in F\}$

Uma linguagem $L \subseteq \Sigma^*$ é reconhecível se existe uma afd A tal que $L = L(A)$

Notação: $Rec(\Sigma)$ é a família de todas as linguagens reconhecíveis sobre Σ

Seja $A=(Q,\Sigma,\delta,s,F)$ uma a.f.d. Vamos extender a função de transição $\delta: Q \times \Sigma \to Q$ para uma função $\hat{\delta}: Q \times \Sigma^* \to Q$ da seguinte forma:

$\hat{\delta}(q,\lambda) = q$ para todo $q \in Q$

$\hat{\delta}(q,x\sigma) = \delta(\hat{\delta}(q,x),\sigma)$, $\forall\ q \in Q, \forall\ x \in \Sigma^*, \forall\ \sigma \in \Sigma$

Exemplo: $\hat{\delta}(q_0, abba) = \delta(\hat{\delta}(q_0,abb),a)$

afd $A=(Q,\Sigma,\delta,s,F)$ $\quad = \delta(\delta(\hat{\delta}(q_0,ab),b),a)$

$Q=\{q_0,q_1\}$, $\Sigma=\{a,b\}$, $\quad = \delta(\delta(\delta(\hat{\delta}(q_0,a),b),b),a)$

$s=q_0$, $F=\{q_0\}$ $\quad = \delta(\delta(\delta(\delta(\hat{\delta}(q_0,\lambda),a),b),b),a) = q_0$

δ \ Estados	Símbolos a	b
q_0	q_0	q_1
q_1	q_1	q_0

Observações:

① $\hat{\delta}$ coincide com δ em Σ

② Vamos escrever δ ao invés de $\hat{\delta}$

spiral

Prova

① $\forall q \in Q, \forall \sigma \in \Sigma$

$$\hat{\delta}(q,\sigma) = \hat{\delta}(q,\lambda\sigma) \overset{\text{def } \hat{\delta}}{=} \delta(\hat{\delta}(q,\lambda),\sigma) \overset{\text{def } \delta}{=} \delta(q,\sigma)$$

Proposição 1: Seja $A = (Q,\Sigma,\delta,s,F)$ a.f.d. $\forall q \in Q, \forall x,y \in \Sigma^*$

$$\delta(q,xy) = \delta(\delta(q,x),y)$$

Prova: indução no $|y|$

Proposição 2: Seja $A = (Q,\Sigma,\delta,s,F)$ uma a.f.d. $\forall p,q \in Q, \forall x,y \in \Sigma^*$

$(p,xy) \vdash_A^* (q,y)$ se e somente se $\delta(p,x) = q$

Prova

($\Rightarrow$) (?) $\forall p,q \in Q, \forall x,y \in \Sigma^*$, se $(p,xy) \vdash_A^* (q,y)$ em $n \geq 0$ passos então $\delta(p,x) = q$.

(Prove por indução em n.)

($\Leftarrow$) (?) $\forall p,q \in Q, \forall x \in \Sigma^*$, se $\delta(p,x) = q$, então $\forall y \in \Sigma^*$, $(p,xy) \vdash_A^* (q,y)$

(Prove por indução no $|x|$)

Corolário 3: Seja $A = (Q,\Sigma,\delta,s,F)$ um a.f.d. Então, $L(A) = \{x \in \Sigma^* : \delta(s,x) \in F\}$

Prova

$L(A) = \{x \in \Sigma^* : x$ é aceita por $A\}$

$= \{x \in \Sigma^* : (s,x) \vdash_A^* (q,\lambda)$, para algum $q \in F\}$

proposição 2 $= \{x \in \Sigma^* : \delta(s,x) = q$, para algum $q \in F\}$

$= \{x \in \Sigma^* : \delta(s,x) \in F\}$

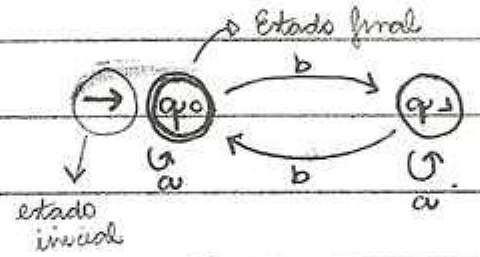
spiral

O *grafo* de um afd $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, denotado por $G(A)$ é o grafo orientado e rotulado com:

- $VG = Q$
- $aG = \{(p, \sigma, q) : p, q \in Q, \sigma \in \Sigma \text{ e } \delta(p, \sigma) = q\}$

Exemplo:

A :



Um *passeio* em $G(A)$ é uma sequência de $n \geq 0$ arestas consecutivas $P = (p_0, \sigma_1, p_1)(p_1, \sigma_2, p_2) \ldots (p_{n-1}, \sigma_n, p_n)$ com
- comprimento $|P| = n$.
- origem p_0
- término p_n
- rótulo $\|P\| = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n$

Notação simplificada: $P : p_0 \overset{x}{\rightsquigarrow} p_n$, onde $x = \sigma_1 \ldots \sigma_n$ (dizemos que P soletra x)

Observação: Um passeio de comprimento zero, chamado de *passeio trivial*, é um passeio com origem e término igual a q, $\forall q \in Q$, e rótulo λ.

Sejam $P = (p_0, \sigma_1, p_1) \ldots (p_{n-1}, \sigma_n, p_n)$ e $Q = (q_0, \tau_1, q_1) \ldots (q_{m-1}, \tau_m, q_m)$ dois passeios em $G(A)$, com $q_0 = p_n$. A *concatenação* dos passeios P e Q é o passeio $PQ = (p_0, \sigma, p_1) \ldots (p_{n-1}, \sigma_n, p_n)(q_0, \tau_1, q_1) \ldots (q_{m-1}, \tau_m, q_m)$ com $|PQ| = |P| + |Q| = n + m$ e $\|PQ\| = \|P\| \|Q\| = \sigma_1 \ldots \sigma_n \tau_1 \ldots \tau_m$

Proposição 4: Seja $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ uma a.f.d. $\forall p, q \in Q, \forall x \in \Sigma^*$ existe em $G(A)$ um passeio $P : p \overset{x}{\rightsquigarrow} q$ se e somente se $\delta(p, x) = q$

Prova: ($\Rightarrow$) indução no $|P|$

($\Leftarrow$) indução no $|x|$

spiral

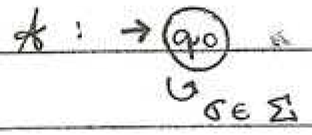
Corolário 5: Seja $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ um a.f.d.. Então,

$L(\mathcal{A}) = \{x \in \Sigma^* :$ existe um $G(\mathcal{A})$ um passeio $P : s \overset{x}{\mapsto} q$, para algum $q \in F\}$

Prova: Segue do Corolário 3 e da Proposição 4.

Alguns exemplos de linguagens reconhecíveis

① $\emptyset$

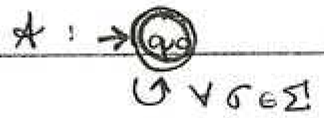


$\forall x \in \Sigma^*, \ \delta(q_0, x) = q_0 \notin F$.

Logo, $\forall x \in \Sigma^*, \ x \notin L(\mathcal{A})$.

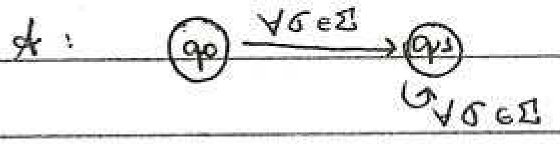
Portanto, $L(\mathcal{A}) = \emptyset$

② Σ^*



③ $\{\lambda\}$

$\delta(q_0, \lambda) = q_0 \in F \ \therefore \ \lambda \in L(\mathcal{A})$



Seja $x \in \Sigma^*$, $x \neq \lambda$

Então, $x = \sigma y$, para $\sigma \in \Sigma$ e $y \in \Sigma^*$

Logo, $\delta(q_0, x) = \delta(q_0, \sigma y)$

$= \delta(\delta(q_0, \sigma), y)$

$= \delta(q_1, y) = q_1 \notin F$

$\therefore \ \forall x \in \Sigma^+, \ x \notin L(\mathcal{A})$

④ $\Sigma^+ = \Sigma^* - \{\lambda\}$