Autômatos

<u>Algumas propriedades</u> : $\forall A, B, L \subseteq \Sigma^*$

a) se $A \subseteq B$ então $A^n \subseteq B^n$, p/ todo $n \geq 0$

b) $A \subseteq B$ então $A^* \subseteq B^*$

c) $L^* L^* = L^*$

d) $(L^*)^n = L^*$ p/ todo $n > 0$.

e) $(L^*)^* = L^*$

f) $L^+ = L L^* = L^* L$

g) $L^* = L^+ \cup \{\lambda\}$

c) $L^* L^* = L^*$

(?) $L^* \subseteq L^* L^*$

$L^* = L^* \{\lambda\} \subseteq L^* L^*$

(b) e $\{\lambda\} \subseteq L^*$

(?) $L^* L^* \subseteq L^*$

Seja $w \in L^* L^*$. Então, existem x e y em L^* tq $w = xy$. Ou seja, existem int. m e $n \geq 0$ tq $x \in L^m$ e $y \in L^n$. Logo, $w = xy \in L^m L^n = L^{m+n} \subseteq L^*$. Portanto $w \in L^*$

5) <u>O reverso de uma linguagem</u>, $L \subseteq \Sigma^*$, denotado por L^R, é $L^R = \{x^R : x \in L\}$

$= \{x \in \Sigma^* : \text{existem } u \text{ e } v \text{ em } \Sigma^* \text{ tq } u x v \in L\}$

Algumas propriedades : $\forall A, B, L \subseteq \Sigma^*$

a) $(L^R)^R = L$

b) $(AB)^R = B^R A^R$

c) $(A \cup B)^R = A^R \cup B^R$

~~d)~~ $(A \cap B)^R = A^R \cap B^R$

d) $(L \cup L^R)^R = L \cup L^R$

e) $\cancel{(\overline{L})^R} = (\overline{L})^R = \overline{(L^R)}$

f) $(L^*)^R = (L^R)^*$

Monitor : rafael
- 3ª 12 às 13
- sala ?

~~IX~~ 6) **Prefixo , Sufixo e Fator**

$L \subseteq \Sigma^*$ $Pref(L) = \bigcup_{x \in L} Pref(x) =$

$= \{x \in \Sigma^* : \text{existe } y \text{ em } \Sigma^* \text{ tq } xy \in L\}$

$Suf(L) = \bigcup_{x \in L} Suf(x)$

$Fat(L) = \bigcup_{x \in L} Fat(x) =$

II) Expressões regulares e linguagens regulares

Seja Σ um alfabeto. Considere o alfabeto $\Gamma = \Sigma \cup \underbrace{\{ (,), \emptyset, +, \cdot, * \}}_{\cap \Sigma = \emptyset}$, onde os novos

símbolos não pertecem a Σ.

Uma expressão regular sobre Σ é definida indutivamente por:

(i) $\emptyset$ e σ, p/ cada $\sigma \in \Sigma$, são exp. reg

(ii) se α e β são exp. reg. sobre Σ, então $(\alpha + \beta)$, $(\alpha \cdot \beta)$ e $(\alpha *)$ tbém são exp. reg.

Exemplo: $\Sigma = \{a, b\}$

Algumas exp. reg. sobre Σ:

$\emptyset$; a ; b ; $(a+b)$; $(a \cdot b)$; $(a*)$

$((a*) \cdot (a+b))$; $(((a \cdot (a+b)) \cdot b)*)$; $(\emptyset *)$

Notação: $ER(\Sigma)$: conj de todas as exp. reg sobre Σ

– Para cada α em $ER(\Sigma)$, associamos uma linguagem $L(\alpha) \subseteq \Sigma^*$ da seguinte forma:

$L(\alpha) \subseteq \Sigma^*$ da seguinte forma:

$L(\emptyset) = \emptyset$

$L(\sigma) = \{\sigma\}$, p/ cada $\sigma \in \Sigma$

$L((\beta + \gamma)) = L(\beta) \cup L(\gamma)$, p/ β e γ em $ER(\Sigma)$

$L((\beta \cdot \gamma)) = L(\beta)\, L(\gamma)$, p/ β e γ em $ER(\Sigma)$

$L((\beta^*)) = (L(\ ))^*$, p/ β em $ER(\Sigma)$

Exemplos:

1) $\Sigma = \{a, b\}$ e $\alpha = (((a+b)^*) \cdot a)$

$$
\begin{aligned}
L(\alpha) &= L((((a+b)^*) \cdot a)) \\
&= L(((a+b)^*))\, L(a) \\
&= (L((a+b)))^* \{a\} \\
&= (L(a) \cup L(b))^* \{a\} \\
&= (\{a\} \cup \{b\})^* \{a\} \\
&= \{a, b\}^* \{a\} = \{x \in \Sigma^* : x \text{ termina por } a\}
\end{aligned}
$$

2) $\Sigma = \{a, b, c\}$

$\alpha = ((c^*) \cdot ((a + (b \cdot (c^*)))^*))$

$L(\alpha) \overset{?}{=} \{x \in \Sigma^* : \text{o fator } ac \text{ não ocorre em } x\} =$

$= \overline{\Sigma^* \{ac\} \Sigma^*}$

$(a + (b + c))$ $a + b + c$
$(a + (b \cdot c))$ $a + bc$

Observações

1) Existe uma precedência sobre os operadores: $*$, $\cdot$, $+$ (maior → menor)
2) Utilizando a associatividade de $+$ e $\cdot$, e obs 1), podemos omitir parêntesis supérfluos e $\cdot$.
3) Vamos permitir algumas abreviações p/ escrever exp. reg.: λ ao invés de $\emptyset^*$, α^n, p/ $n \geq 1$, ao invés de $\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{n \text{ vezes}}$, p/ $\alpha \in ER(\Sigma)$,

α^+ ao invés de $\alpha \cdot \alpha^*$, p/ $\alpha \in ER(\Sigma)$
Σ ao invés de $\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n$ p/ $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$

Dizemos que duas exp. reg α e β são equivalentes ($\alpha \equiv \beta$) se $L(\alpha) = L(\beta)$.

Exemplos: $a + b \equiv b + a$
$110^* + 101^* = 1(10^* + 01^*)$

$(a^3)^* (a^4)^* \equiv \lambda + a^3 + a^4 + a^6 a^*$

p/ todo natural n, $n \geq 6$, existem nat k e l tq $n = 3k + 4l$)

- Algumas propriedades algébricas de exp. reg ($\forall \alpha, \beta, \gamma \in ER(\Sigma)$)

1) $\alpha + \beta \equiv \beta + \alpha$
2) $(\alpha + \beta) + \gamma \equiv \alpha + (\beta + \gamma)$
3) $(\alpha\beta)\gamma \equiv \alpha(\beta\gamma)$
4) $\alpha(\beta + \gamma) \equiv \alpha\beta + \alpha\gamma$
5) $(\alpha + \beta)\gamma \equiv \alpha\gamma + \beta\gamma$
6) $\alpha + \emptyset \equiv \alpha$
7) $\lambda\alpha \equiv \alpha\lambda \equiv \alpha$
8) $\alpha^* \equiv (\alpha + \lambda)^*$
9) $(\alpha^*)^* \equiv \alpha^*$

Escreva exp. reg. p/ as seg. linguagens:

1) Cjto de identificadores (seq de letras ou dígitos, começando por uma letra)

Σ = Letras $\cup$ Dígitos

Letras = $\{a, \ldots, z, A, \ldots, Z\}$

Dígitos = $\{0, 1, \ldots, 9\}$

α : Letras (Letras + Dígitos)*

2) Conj. dos nºs reais em notação decimal ou exponencial (ex. 123, -123.5, +12E-3, ...)

ex. 123, -123.5, ...

(20

$\Sigma = Digito \cup \{+, -, ., E\}$

$Digito = \{0, 1, \dots, 9\}$

$\alpha = (\lambda + + + -) Digitos^+ (\lambda + . Digitos^+)(\lambda + E(\lambda + + + -) Digitos^+)$