Autom.   7/8/18 001

2) $\forall x, y \in \Sigma^*, (xy)^R = y^R x^R$

Prova por indução no $|x|$

- Base da indução: $|x| = 0$; então, $x = \lambda$

Logo, $(xy)^R = (\lambda y)^R = y^R = y^R \lambda = y^R \lambda^R = y^R x^R$

- Seja $n \geq 0$

- Hipótese de indução: Suponha que $\forall x, y \in \Sigma^*$, com $|x| = n$, $(xy)^R = y^R x^R$

- Passo da indução: Sejam x e $y \in \Sigma^*$, com $|x| = n+1$. Então, $x = \sigma u$, p/ $\sigma \in \Sigma$ e $u \in \Sigma^*$.

Logo, $(xy)^R = ((\sigma u) y)^R \underset{\text{ASSOC}}{=} (\sigma (u y))^R =$

$$
\begin{aligned}
\text{def reverso} \quad &= (uy)^R \sigma \\
\text{R.i.} (|u| = n) \quad &= (y^R u^R) \sigma \\
\text{assoc.} \quad &= y^R (u^R \sigma) \\
\text{def. reverso} \quad &= y^R (\cancel{u \sigma}\, \sigma u)^R \\
&= y^R x^R
\end{aligned}
$$

- Uma linguagem sobre Σ é um subconjunto de Σ^*

Exemplos: $\emptyset$, Σ, Σ^*, $\{\lambda\}$, $\{a, b, aa, ab\}$, $\{x \in \Sigma^* : |x| < 100\}$, $\{x \in \Sigma^* : |x| \text{ é par}\}$, $\{x \in \{a,b\}^* : |x|_a$ ~~[illegible]~~ é par$\}$

$\{ x \in \{a,b,c\}^* : |x|_a = |x|_b = |x|_c \}$, $\underline{1002}$

$\{ a^n b^n c^n : n \geq 0 \}$

$\{ x \in \Sigma^* : x = x^R \}$, $\{ xx : x \in \Sigma^* \}$

$\{ x \in \{0,1\}^* : |x|_0 \equiv 1 \pmod 3 \}$

- Operações sobre linguagens

1) **Operações booleanas**: Sejam $A, B \subseteq \Sigma^*$

- união: $A \cup B = \{ x \in \Sigma^* : x \in A \text{ ou } x \in B \}$
- intersecção: $A \cap B = \{ x \in \Sigma^* : x \in A \text{ e } x \in B \}$
- diferença: $A - B = \{ x \in \Sigma^* : x \in A \text{ e } x \notin B \} = \underbrace{A \cap \bar{B}}$
- complemento (com relação a Σ^*):

$$\bar{A} = \Sigma^* - A = \{ x \in \Sigma^* : x \notin A \}$$

Leis de De Morgan

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

2) **Concatenação**

Sejam A e $B \subseteq \Sigma^*$

$$AB = \{ w \in \Sigma^* : w = xy, \text{ com } x \in A \text{ e } y \in B \}$$

$$= \{ xy \in \Sigma^* : x \in A \text{ e } y \in B \}$$

Exemplo 1: Sejam $\Sigma = \{a, b\}$, $A = \{\Lambda, a, ab\}$ e

$B = \{a, ba\}$

$AB = \{ a, ba, aa, aba, \cancel{aba}, abba \}$ (003

$BA = \{ \ldots \}$

<u>Exemplo</u> 2: Sejam $\Sigma = \{0, 1\}$, $A = \{x \in \Sigma^* : |x|_0$ é par$\}$ e $B = \{x \in \Sigma^*$: x começa com zero e é seguido de um ou mais 1's$\}$

$AB = ?$ Vamos provar que $AB = C$, onde $C = \{x \in \Sigma^* :$ $|x|_0$ é ímpar e x termina por 1$\}$

(?) $AB \subseteq C$ Seja $w \in AB$. Então, existem x em A e y em B tq $w = xy$. Logo,

$$|w|_0 = |xy|_0 = \underbrace{|x|_0}_{\substack{\text{par} \\ (x \in A)}} + \underbrace{|y|_0}_{\substack{= 1 \\ (y \in B)}} \text{ é ímpar}$$

Além disso, como $w = xy$ e y termina por 1 (pois $y \in B$), segue que w termina por 1.

Portanto, $\ldots$, $w \in C$.

(?) $C \subseteq AB$

Seja $w \in C$. Então, $|w|_0$ é ímpar e w termina por 1. Logo, $w = x0y1$, com $x \in \{0,1\}^*$ e $y \in \{1\}^*$ (supondo a última ocorrência de 0 em w). Então, $|x|_0$ é par e segue que $x \in A$. Além disso, $z = 0_1 1 \in B$. Portanto, $w = xz \in AB$.

- <u>Algumas propriedades</u>: $\forall A, B, C \subseteq \Sigma^*$,

a) $(AB)C = A(BC)$ (assoc)

b) $\{\lambda\}A = A\{\lambda\} = A$ ($\{\lambda\}$ é o elemento neutro p/ conc. de ling)

c) $\emptyset A = A\emptyset = \emptyset$ ($\emptyset$ é o elemento zero da concat. de ling)

d) Se $A \subseteq B$ então $CA \subseteq CB$ e $AC \subseteq BC$

e) $\left.\begin{array}{l} A(B \cup C) = AB \cup AC \\ (A \cup B)C = AC \cup BC \end{array}\right\}$ distrib. da concat. em relação à união

f) Seja $\{L_i : i \in I\}$ uma família de ling. indexada por um conj. I, finito ou infinito. Então, $A\left(\bigcup_{i \in I} L_i\right) = \bigcup_{i \in I} AL_i$ e

$$\left(\bigcup_{i \in I} L_i\right)A = \bigcup_{i \in I} L_i A$$

Obs.: A distributividade (à esq ou à dir) da concatenação com relação à intersecção ñ é válida p/ qq ling.

(Exercício: Apresente um exemplo)

e) $A(B \cup C) = AB \cup AC$

($? \subseteq$) $w \in A(B \cup C)$

$w = xy$, $x \in A$ e $y \in B \cup C$

- se $y \in B$ então $w = xy \in AB \subseteq AB \cup AC$
- analogamente se $y \in C$

($? \supseteq$) $AB \cup AC \subseteq A(B \cup C)$?

$$\left.\begin{array}{l} B \subseteq B \cup C \xrightarrow{(d)} AB \subseteq A(B \cup C) \\ C \subseteq B \cup C \xrightarrow[(d)]{} AC \subseteq A(B \cup C) \end{array}\right\} \begin{array}{l} AB \cup \\ AC \\ \subseteq (B \cup C) \end{array}$$

3) <u>Potência</u>:

Para $L \subseteq \Sigma^*$ e $n \geq 0$, a n-ésima potência de L, denotada por L^n, é definida por:

$$\begin{cases} L^0 = \{\lambda\} \\ L^n = L^{n-1} L, \text{ p/ } n > 0. \end{cases}$$

<u>Obs</u>.: p/ $n > 0$, $L^n = \{w \in \Sigma^*$: existe uma fatoração de w com n fatores e cada um deles fatores pertence a $L\}$

$= \{w \in \Sigma^* : w = w_1 \ldots w_n$, com $w_i \in L$, p/ $1 \leq i \leq n\}$

Obs.: $\emptyset^0 = \{\lambda\}$ e $\emptyset^n = \emptyset$, p/ $n > 0$

$\{\lambda\}^n = \{\lambda\}$, p/ $n \geq 0$

· **Algumas propriedades**: $\forall L \subseteq \Sigma^*$, $\forall m, n \geq 0$,

a) $(\{\lambda\} \cup L)^n = \{\lambda\} \cup L \cup L^2 \cup \ldots \cup L^n$ =

Ex.: $L = \{a, ab, ba\}$

$L^2 = \{aa, aab, aba, \cancel{aba}, abab, abba, baa, baab, baba\}$

$= (L^n$ se $\lambda \in L)$

b) $L^m L^n = L^{m+n}$

c) $(L^m)^n = L^{m \times n}$

4) Estrela de Kleene: Seja $L \subseteq \Sigma^*$: ~~existe uma fatoração de w com todos os fatores pertencentes a L}~~

$L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n = \{w \in \Sigma^* : w = \lambda$ ou existe uma fatoração de w com todos os fatores pertencentes a $L\} = \{w \in \Sigma^* : w = w_1 \ldots w_n$ p/ algum $n \geq 0$ e $w_i \in L$, p/ $1 \leq i \leq n\}$

Obs: $\emptyset^* = \{\lambda\}$, $\{\lambda\}^* = \{\lambda\}$

$L^+ = \bigcup_{n>0} L^n = L^* - \{\lambda\}$, se $\lambda \notin L$ ou L^* se $\lambda \in L$