MAC-414 5/9/08 (003

Linguagens Formais e Autômatos

3 Provas sem ~~lista~~ sub

Listas não obrigatórias

.../~nami/mac414-08

se passar de média, não precisa de presença.

— // —

I) Alfabeto, palavras e linguagens

Um alfabeto é um conjunto finito, não-vazio, de símbolos (ou letras ou caracteres)

Ex.: $\{a, \ldots, z, A, \ldots, Z\}$, $\{0, \ldots, 9\}$, $\{0,1\}$ ou $\{a,b\}$, conjunto dos caracteres ASCII

Denotamos um alfabeto qualquer por Σ (sigma)

Uma palavra sobre um alfabeto Σ é uma sequência finita de símbolos de Σ

- representação: $x = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_3$, com $\sigma_i \in \Sigma$, p $1 \leq i \leq n$
(ao invés de $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$)

Exemplo: algumas palavras sobre $\Sigma = \{a, b, c\}$ a, c, ab, aa, cab, bba, ...

- O comprimento de uma palavra x, denotado por $|x|$, é a quantidade de símbolos que compõem a palavra x (não-únicos)

Ex.: $|aabacba| = 7$

- Existe uma única palavra de comprimento zero, chamada de palavra vazia e denotada por λ (ou ε, ou 1). Ela é uma palavra sobre qualquer alfabeto.

- O número de ocorrências de uma letra σ de Σ numa palavra x sobre Σ é denotada por $|x|_\sigma$

Exemplo: Sejam $\Sigma = \{a, b, c\}$ e $x = baaba$

$|x|_a = 3$

$|x|_b = 2$ $\qquad |x| = |x|_a + |x|_b + |x|_c$

$|x|_c = 0$

Obs.: seja x uma palavra sobre Σ

$$|x| = \sum_{\sigma \in \Sigma} |x|_\sigma$$

<u>Algumas notações</u>:

- Σ^k, p $k \geq 0$, é o conjunto de todas as palavras sobre Σ de comprimento k

($\Sigma^1 = \Sigma$ e $\Sigma^0 = \{\lambda\}$

- Σ^* é o conjunto de todas as palavras sobre Σ ($\Sigma^* = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \ldots$)
- Σ^+ é o conjunto de todas as palavras não-vazias sobre Σ

($\Sigma^+ = \Sigma^* - \{\lambda\}$

- <u>A concatenação de duas palavras</u> sobre Σ é uma operação binária

$$\begin{aligned} \Sigma^* \times \Sigma^* &\longrightarrow \Sigma^* \\ (x, y) &\longmapsto xy \end{aligned}$$

Ex: $\Sigma = \{a, b, c\}$

$x = abaa$

$y = acb$

$xy = abaaacb$

$yx = acbabaa$

<u>Algumas propriedades</u>

Algumas Propriedades 5/4/8 006

1) $\forall x \in \Sigma^*$, $\lambda x = x = x\lambda$
(λ é o elemento neutro para concatenação de palavras) ou identidade

2) $\forall x, y, z \in \Sigma^*$, $(xy)z = x(yz)$
(ou a concatenação de pal. é associativa)

3) $\forall x, y, \in \Sigma^*$, $|xy| = |x| + |y|$

(Um monóide é um conj. com uma operação binária associativa e tem um elemento neutro - 2 e 1)

- Σ^* é um monóide, chamado de monóide livre
- Para uma palavra x em Σ^* e $n \geq 0$, a n-ésima potência de x, denotada por x^n, é def. por:

$$x^0 = \lambda$$

$$x^n = x^{n-1}x \text{, para } n > 0$$

Algumas Propriedades

C007

$\forall x \in \Sigma^*$, $\forall m, n \geq 0$,

1) $|x^m| = m|x|$
2) $x^m x^n = x^{m+n}$
3) $(x^m)^n = x^{m \times n}$
4) $\lambda^m = \lambda$

2) $x^m x^n = x^{m+n}$

Seja x em Σ^*

Vamos provar que: p/ todo $n \geq 0$, vale que $\forall m \geq 0$, $x^m x^n = x^{m+n}$

(por indução em n)

Base: $n = 0$

$\forall m \geq 0$, $x^m x^n = x^m x^0 \overset{\text{def. pot.}}{=} x^m \lambda = x^m =$

$= x^{m+0} = x^{m+n}$

Seja $n \geq 0$

Hipótese de indução:

Suponha que $\forall m \geq 0$, $x^m x^n = x^{m+n}$

Passo da indução:

$\forall m \geq 0$, $x^m x^{n+1} \overset{\text{def pot}}{=} x^m (x^n \cdot x) \overset{\text{ASSOC. CONCAT}}{=} (x^m x^n) x =$

2)

$\overset{1}{=} x^{m+n} x \overset{\text{def. pot}}{=} x^{m+n+1}$.

L008

Sejam x e u em Σ^*. Dizemos que

- u é um <u>prefixo</u> de x se existe v em Σ^* tq $x = uv$
- u é um sufixo de x se existe v em Σ^* tq $x = vu$
- u é um <u>fator</u> (ou segmento) de x se existem v e w em Σ^* tq $x = vuw$

Obs.:

1) x e λ são prefixos, sufixos e fatores de x

2) Se $|x| = n$, então p/cada k, $0 \leq k \leq n$, x tem um único prefixo e um único sufixo de comprimento k.

<u>Notação</u>: Seja x em Σ^*

Pref(x) = conj. de todos os prefixos de x

Suf(x): " " " fatores de x

($n+1$ sufixos e $n+1$ prefixos)

- Dizemos que u é um <u>fator</u> (ou um prefixo ou sufixo) <u>próprio</u> de x se $u \neq \lambda$ e ~~uvw~~ $u \neq x$ 009

. Para $k \geq 1$ e $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ em Σ^*, dizemos que a seq $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ é uma <u>fatoração</u> de x em k fatores se

$x = x_1 x_2 \cdots x_k$.

- Uma <u>fatoração</u> é <u>própria</u> se $k > 1$ e $x_i \neq \lambda$ p/ $1 \leq i \leq k$

- <u>Propriedade</u> (lei do cancelamento)

$\forall x, y, z$ em Σ^*,

se $xy = xz$ então $y = z$ e se $yx = zx$, também.

O inverso de uma palavra x em Σ^*, denotado por x^R, é definido por

$\lambda^R = \lambda$

$(\sigma y)^R = y^R \sigma$, p/ $\sigma \in \Sigma$ e $y \in \Sigma^*$

Dizemos que uma palavra é um <u>palíndromo</u> se $x = \cancel{x^*}\ x^R$.

Algumas Propriedades

C010

1) Se $x = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k$, com $\sigma_i \in \Sigma$ p/ $1 \leq i \leq k$, então $x^R = \sigma_k \dots \sigma_2 \sigma_1$

2) $\forall x, y \in \Sigma^*$ $(xy)^R = y^R x^R$

3) $\forall x \in \Sigma^*$, $(x^R)^R = x$