28/4/18

ProgLin

(PLC) $\begin{cases} \min \ c'x \\ \text{s.a} \ \ Ax = b \\ \qquad x \geq 0 \end{cases}$

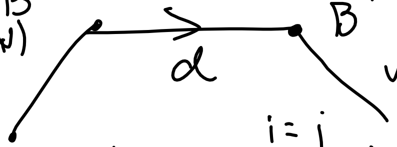
onde A possui linhas l.i.

$\bar{x} \leftrightarrow B = \{B_1, B_2, B \dots, B_n\}$

$\Downarrow$

$\bar{x}_i = 0 \ i \notin B$ $(i \in N)$

$\bar{x}_B = B^{-1} b$



$B' = B \setminus \{j\} \cup \{k\}$

vizinha

$\Updownarrow$

$y_i = 0 \quad \forall i \notin B'$

$Ax = b \quad d_i = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \in N \setminus \{j\} \\ \bigcirc & i \in B \end{cases}$

$Ay = b$

$Ay = b$

$\underbrace{A(\bar{x}}_{=\cancel{b}} + \underbrace{\theta d}_{\geq 0}) = \cancel{b}$

$Ad = 0 \implies 0 = B d_B + \sum_{i \in N} A d_i = B d_B + A^j$

Nos ptos de forma $\bar{x} + \theta d$, a fç obj. é,

$c'(\bar{x} + \theta d) = \underbrace{c'\bar{x}}_{\text{CTE}} + \theta c' d = c'\bar{x} + \theta(c_j + c_B' d_B)$

$= c'x + \theta \underbrace{(c_j - c_B' B^{-1} A^j)}$

custo reduzido associado à j-ésima direção básica $(\bar{c}_j)$

Teorema: Seja $\bar{x}$ é uma solução básica viável

1) $\bar{c} \geq 0 \Rightarrow \bar{x}$ é solução ótima

2) $\bar{x}$ é solução ótima e não degenerada $\Rightarrow \bar{c} \geq 0$

$\bar{c}_j = c_j - c_B' B^{-1} A^j$ Se $j \in B$ $(j = B_i)$ $= c_j - c_B' \underbrace{B^{-1} A^{B_i}}_{e^i}$

$B = [A^{B_1} | A^{B_2} | \dots | A^{B_n}]^{-1}$

$= c_j - c_B' e^i$

$= c_j - c_{B_i} = j$

$= c_j - c_d$

$= 0$

Seja $y \in P$ qqer, e $d = y - \bar{x}$. Como $A\bar{x} = Ay = b$

$\Rightarrow Ad = 0$

$B d_B + \sum_{i \in N} A^i d_i = 0$

$d_B = -\sum_{i \in N} B^{-1} A^i d_i = 0$

i-ésima direção básica

$d_B = -\sum_{i \in N} B^{-1} A^i d_i$

custo reduzido associado à i-ésima direção básica

$c'd = c_B' d_B + \sum_{i \in N} c_i d_i = \sum_{i \in N} (c_i - c_B' B^{-1} A^i) d_i$

140

1) Se $\bar{c} \geq 0$, temos $c'd = \sum_{i \in N} \overset{\geq 0}{\bar{c}_i} \overset{\geq 0}{d_i} = \underset{\geq 0}{y_i} - \bar{x}_i = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow c'(y - \bar{x}) \geq 0$

$\Rightarrow c'y \geq c'\bar{x}$ (para qq $y \in P$) $\Rightarrow \bar{x}$ é soluç. ótima

2) Suponha por contrad. que $\exists j \in N$ tq $\bar{c}_j < 0$. Seja d a j-ésima direção básica ($d_j = 1, d_i = 0$ $\forall i \in N \setminus \{j\}$, $d_B = -B^{-1}A^j$). Considere um ponto da forma $\bar{x} + \theta d$. Então $c'(\bar{x} + \theta d) = c'\bar{x} + \theta \overset{<0}{\bar{c}_j}$. Como $\bar{x}$ é não degenerado, $\bar{x}_B > 0$ e existe algum $\theta > 0$ tal que $\bar{x}_B + \theta d \geq 0$. Assim $\bar{x} + \theta d \in P$ e $c'(\bar{x} + \theta d) < c'\bar{x}$, contradizendo a otimalidade de $\bar{x}$. Assim $\bar{c} \geq 0$.

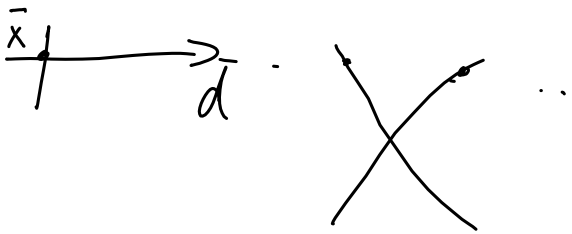
<u>Def</u>: B é uma base ótima se o vetor de custos reduzidos associado satisfaz $\bar{c} \geq 0$.

Dada uma direção básica a partir de $\bar{x}$, queremos saber qual é o maior θ tal que $\bar{x} + \theta d \in P$. Precisamos garantir que $\bar{x} + \theta d \geq 0$ (pois $A(\bar{x} + \theta d) = b$ por construção).

$\bar{x}_{B_i} + \theta d_{B_i} \geq 0$?

se $d_{B_i} \geq 0 \Rightarrow \bar{x}_{B_i} + \theta d_{B_i} \geq 0 \;\; \forall \theta \geq 0$

se $\quad < 0 \Rightarrow$ " " ", somente se $\theta \leq -\dfrac{\bar{x}_{B_i}}{d_{B_i}}$



Para $\bar{x} + \theta d$ satisfazer todas as restrições, temos 2 casos

$$d \begin{cases} d_B \geq 0 \Rightarrow \text{o poliedro é ilimitado na direção} \\ \text{se } d_B \not\geq 0 \Rightarrow \theta^* = \min\limits_{d_{B_i} < 0} \dfrac{-x_{B_i}}{d_{B_i}} \end{cases}$$

Exemplo

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ & 2x_1 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ & x_1, \dots, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Considere a base $\{1,2\}$. A solução associada é

$$\bar{x}_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\bar{x}_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{x} = (1,1,0,0)$$

Vamos calcular ~~o~~ a j-ésima direção básica associada a $j=3$

$$d = \begin{bmatrix} d_1^{-3/2} \\ d_2^{\;1/2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad d_B = -B^{-1}A^3 = -\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ +1/2 \end{bmatrix}$$

A direção não é de ilimitação (pois $d_2 < 0$). Assim

$$\theta^* = \min_{d_{B_i} < 0} -\frac{x_{B_i}}{d_{B_i}} = -\frac{x_2}{d_2} = -\frac{1}{-1/2} = 2$$

O novo ponto é $\bar{x} + \theta d = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{3}\begin{bmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\bar{y}$ é a solução básica associada à base $B = \{2,3\}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$\bar{c}_j = c_j - c_B' B^{-1} A_j$$

$$\bar{c}_1 = c_1 - \begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = c_1 - [c_2\ c_3]\begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

$$= c_1 - \frac{c_2}{3} - 2\frac{c_3}{3} = 2 \text{ é } \geq 0 \Rightarrow \bar{y} \text{ é ótimo}$$

$$\bar{c}_4 = c_4 - [c_2\ c_3]\begin{bmatrix} -1/3 \\ 4/3 \end{bmatrix} = c_4 + \frac{c_2}{3} - \frac{4}{3}c_3 = 0$$

Dado $\bar{x}$ e B associados, e uma direção básica d associada a $j \in N$, se $d_B \geq 0$, a nova solução será

$$\bar{y}_i = \begin{cases} \bar{x}_j^{=0} + \theta^* d_j^{=1} = \theta^* & \text{se } i = j \\ \cancel{\bar{x}_i^{=0} + \theta^* d_i^{=0} = 0 \quad \text{se } i \in N \setminus \{j\}} \\ \bar{x}_k + \theta^* d_k = \bar{x}_k - \frac{\bar{x}_k}{\cancel{d_k}} \cancel{d_k} = 0 \text{ se } i = k \quad \text{onde } \theta^* = \frac{\bar{x}_k}{d_k} \\ \bar{x}_i + \theta^* d_i & \text{se } i \in B \setminus \{k\} \end{cases}$$

<u>Teorema</u>: se $\bar{x}$ está associado à base B e $\bar{y}$ foi obtido como $\bar{x} + \theta^* d$, onde

$d \equiv$ direção básica associada a $j \in N$ e $\theta^* =$

$$= \frac{-x_{B_K}}{d_{B_K}} = \min_{d_{B_i} < 0} - \frac{x_{B_i}}{d_{B_i}}$$

então

1) As colunas $\{A^{B_1}, A^{B_2}, \dots, A^{B_m}\}$ são linearmente independentes e consequentemente $B' = \{B_1, \dots, B_m\}$ é uma base.

2) $\bar{y}$ é uma solução básica viável associada a B'.

<u>Prova</u>: 1.) $B' = \left[A^{B_1} \middle| \dots \middle| A^j \middle| \dots \middle| A^{B_m}\right]$ é inversível se o sistema $B'\lambda = 0$ só admitir a solução trivial $\lambda = 0$.

Multiplicando o sistema por B^{-1}, temos (1444)

$$B^{-1}B'\lambda = 0$$

$$\left[A^{B_1}\middle|\dots\middle|A^{B_k}\middle|\dots\middle|A^{B_m}\right]^{-1}\left[A^{B_1}\middle|\dots\middle|A^{j}\middle|\dots\middle|A^{B_m}\right]\lambda = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -d_{B_1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -d_{B_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m\end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\overset{>0}{d_{B_k}}\cdot\lambda_k = 0 \Rightarrow \lambda_k = 0 \\ \lambda_i - d_{B_i}\lambda_k = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda = 0$

$\Rightarrow \{A^{B_1},\dots,A^{B_{k-1}}, A^j, A^{B_{k+1}},\dots,A^{B_m}\}$
são li (formam uma base).

2) $\bar{y}$ é viável pois $A\bar{y} = A(\bar{x} + \theta^* d) = \underbrace{A\bar{y}}_{=b} + \theta^* \underbrace{Ad}_{=0} = b$ por construção

b) $\bar{y} = \bar{x} + \theta^* d \geq 0$ pela escolha de θ^*
Além disso $\bar{y}$ está associado a $B' = \{B_1, \dots, \underset{\uparrow B_k}{j}, B_m\}$
pois $\bar{y}_i = 0 \ \forall i \notin B'$ ∎

Dada uma solução básica viável $\bar{x}$ 145
associada à base B, podemos descrever uma iteração do método simplex como

1) Calcule o vetor de custos reduzidos $(\bar{c})$
Se $\bar{c} \geq 0$, pare! A solução $\bar{x}$ é ótima

2) Escolha um $\bar{c}_j < 0$, e calcule a j-ésima direção básica. Se $u = B^{-1}A^j \leq 0$ $(d_B \geq 0)$, o problema é ilimitado, pare!

3) Calcule $\theta^* = \min\limits_{u_i > 0} \frac{x_{B_i}}{u_i}$ e seja

$B_k \in B$ t.q. $\theta^* = \frac{x_{B_k}}{u_k}$. Calcule $\bar{y} = \bar{x} + \theta^* d$

e $B' = \{B^1, B^2, \ldots, B^m\}$

<u>Teorema</u>: Se $P \neq \emptyset$ e todas as soluções básicas forem não-degeneradas, então o método simplex termina em um número finito de passos, com uma das seguintes propriedades

1) B é uma base ótima $(\bar{c} \geq 0)$ e x é solução ótima correspondente ou

2) $\exists d \neq 0$ t.q. $Ad = 0$
$d \geq 0$
$c'd < 0$

$\Rightarrow$ V.O $= -\infty$