FORMAIS 26/8 15

$\varphi_1, \dots \varphi_n \vdash \psi \Rightarrow \varphi_1, \dots, \varphi_n \vDash \psi$

$\varphi_1, \dots, \varphi_n \vDash \psi \Rightarrow \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$

Exemplo: $p \wedge q \vDash q \Rightarrow p \wedge q \vdash q$

1 $p \wedge q \vDash q \Rightarrow \vDash (p \wedge q) \rightarrow q$

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow q$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

2 $\vDash (p \wedge q) \rightarrow q \Rightarrow \vdash (p \wedge q) \rightarrow q$

a $\neg p, \neg q \vDash (p \wedge q) \rightarrow q$ — a ... $\vdash$ ...

b $\neg p, q \vDash (p \wedge q) \rightarrow q$ — b ... $\vdash$ ...

c $p, \neg q \vDash (p \wedge q) \rightarrow q$ $\rightarrow$ c ... $\vdash$ ...

d $p, q \vDash (p \wedge q) \rightarrow q$ — d ... $\vdash$ ...

a $\neg p$ $\quad \neg, \neg q \vdash (p \wedge q) \rightarrow q$

$\neg q$

$p \wedge q$	sup
p	$\wedge e_1$
$\bot$	$\neg e$
q	$\bot e$

$(p \wedge q) \rightarrow q$ $\quad \rightarrow i$

26/8 /16

1. $p \vee \neg p$ LEM

2. p sup
3. $q \vee \neg q$ LEM
4. q sup
$\vdots$ d
$p \wedge q \to q$

$\neg q$ sup
$\vdots$ c
$p \wedge q \to q$

$p \wedge q \to q$ $\vee_e$

$\neg p$ sup
$q \vee \neg q$ LEM

q sup
$\vdots$ b
$p \wedge q \to q$

$\neg q$ sup
$\vdots$ a
$p \wedge q \to q$

$p \wedge q \to q$ $\vee_e$

$p \wedge q \to q$ $\vee_e$

(3) $\vdash (p \wedge q) \to q \Rightarrow p \wedge q \vdash q$

$p \wedge q$
$\vdots$
$p \wedge q \to q$
q $\to_e$

Teorema da Completude

Se $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \psi$, então
$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$

Esquema da prova:

① $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \psi \Rightarrow \vDash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\ldots (\varphi_n \to \psi) \ldots)$ 17

② $\vDash \chi \Rightarrow \vdash \chi$ $\Leftarrow$

③ $\vdash \varphi_1 \to (\ldots (\varphi_n \to \psi) \ldots) \Rightarrow \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$

Proposição: Seja uma fórmula φ e $p_1, \ldots, p_n$ os seus únicos átomos. Seja l uma linha da tabela verdade de φ. Para todo i, $1 \leq i \leq n$,

$$\hat{p}_i = \begin{cases} p_i & \text{se } p_i \text{ é T em } l \\ \neg p_i & \text{se } p_i \text{ é F em } l \end{cases}$$

Então: - se φ é T em l, $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_n \vdash \varphi$

- se φ é F em l, $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_n \vdash \neg\varphi$

Prova da proposição: (Indução na estrutura da fórmula φ)

Base: φ atômica ($\varphi = p$)

p	
T	$p \vdash p$
F	$\neg p \vdash \neg p$

Passo de indução: para qualquer subfórmula φ' de φ, se φ é T em l, $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_n \vdash \varphi'$ e se φ é F em l, $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \ldots, \hat{p}_n \vdash \neg\varphi'$

- Se $\varphi = \neg \varphi_1$

p_1	$\dots$	p_n	$\dots$	φ_1	φ
				T	F
				F	T

temos 2 casos:

(i) se φ é T em l, então φ_1 é F em l. Pela HI $\hat{p}_1, \hat{p}_{\dots}, \hat{p}_n \vdash \neg \varphi_1$

ii) se φ é F em l, então φ_1 é T em l. Pela HI, $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n \vdash \varphi_1$

Aumentamos a prova com uma aplicação de $\neg\neg i$ e obtemos $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n \vdash \neg\neg\varphi_1 = \neg\varphi$

$\varphi = \varphi_1 * \varphi_2 \quad * \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\}$

$q_1, \dots, q_k$ átomos de φ_1

$r_1, \dots, r_m$ átomos de φ_2

$\{q_1, \dots, q_k\} \cup \{r_1, \dots r_m\}$ átomo de φ

OBS.: Sejam φ_1 e φ_2 duas fórmulas. Sejam $\{q_1, \dots, q_k\}$ os átomos de φ_1 e $\{r_1, \dots r_m\}$ os átomos de φ_2. Então de $\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_k \vdash \varphi_1$ e $\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_m \vdash \varphi_2$ podemos concluir que $\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_k, \hat{r}_1, \dots \hat{r}_m \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$

- Se $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$

$p_1 \dots p_n$	φ_1	φ_k	φ
	T	T	T

se φ é T em l então φ_1 e φ_2 são T em l e pela HI, $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n \vdash \varphi_1$ e $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n \vdash \varphi_2$

e juntando as duas provas e acrescentando uma aplicação de $\wedge i$, obtemos $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n \vdash \varphi_1 \wedge \varphi_2$ 26/8 19

Se φ é F em l, temos 3 casos

(i) φ_1 é F e φ_2 é T. Pela HI, $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n \vdash \neg\varphi_1$ e $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n \vdash \varphi_2$. Pela $\wedge i$, temos $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n \vdash \neg\varphi_1 \wedge \varphi_2$. Aumentando a prova obtemos $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n \vdash \neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$

$\neg\varphi_1 \wedge \varphi_2$

$\neg\varphi_1$

$\boxed{\begin{array}{ll} \varphi_1 \wedge \varphi_2 & \text{sup} \\ \varphi_1 & \wedge e_1 \\ \bot & \neg e \end{array}}$

$\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$

(ii) φ_1 é T e φ_2 é F, $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n \vdash \varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$

(iii) φ_1 e φ_2 são F, $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n \vdash \neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$

– Se φ é $\varphi_1 \vee \varphi_2$

Se φ é F, φ_1 e φ_2 são F

$\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n \vdash \neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2$

$\vdots$

$\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)$

Se φ é T

(i) φ_1 T e φ_2 F $\vdash \varphi_1 \wedge \neg\varphi_2 \cdots \varphi_1 \vee \varphi_2$

(ii) φ_1 F e φ_2 T $\vdash \neg\varphi_1 \wedge \varphi_2 \cdots$

(iii) φ_1 T e φ_2 T $\vdash \varphi_1 \times \varphi_2$