Formais 8/8 | 13

① Se o trem^{p} atrasa, e não há^{q} taxis, então João se^{r} atrasa. O trem atrasa, João não se atrasa. Logo, há taxis

② Se chove^{p} e Maria não tem^{q} guarda-chuva, então Maria se molha. Chove. Maria ñ se molha. Logo, Maria tem guarda chuva.

LÓGICA PROPOSICIONAL

- proposições (átomos) $p, q, r, \dots$
- símbolos lógicos
  - $\neg$ - negação
  - $\wedge$ - conjunção ("e") $\quad p \wedge \neg r$
  - $\vee$ - disjunção ("ou") $\quad p \vee \neg p$
  - $\rightarrow$ - implicação ("se ... então ...")

①
$$\begin{array}{l} ((p \wedge (\neg q)) \rightarrow r) \\ p \\ \neg r \\ \hline q \end{array}$$

②
$$\begin{array}{l} p \wedge \neg q \rightarrow r \\ p \\ \neg r \\ \hline q \end{array}$$

$\neg$

$\wedge, \vee$

$\rightarrow$

Formalmente ...

Def.: fórmulas

- $\mathcal{P}$: infinito de átomos
- símbolos lógicos

  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, (,)$

$\rightarrow$ $p \; (\;) \; \neg \; \vee \vee$ $\rightarrow$ não está bem-formada

Def.: Fórmulas bem formadas

- todo ~~mundo~~ átomo é fbf
- se φ é f.b.f então $(\neg\varphi)$ é f.b.f.
- se φ e ψ são f.b.f, então:

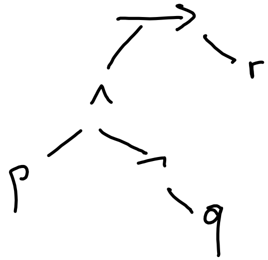
$$\left.\begin{array}{l} (\varphi \wedge \psi) \\ (\varphi \vee \psi) \\ (\varphi \rightarrow \psi) \end{array}\right\} \text{são f.b.f.'s}$$

$(\neg(p \wedge q))$

$(\underbrace{(p \wedge (\neg q))}_{\varphi} \rightarrow \underbrace{r}_{\psi})$ | $\neg \underbrace{q}_{\varphi}$

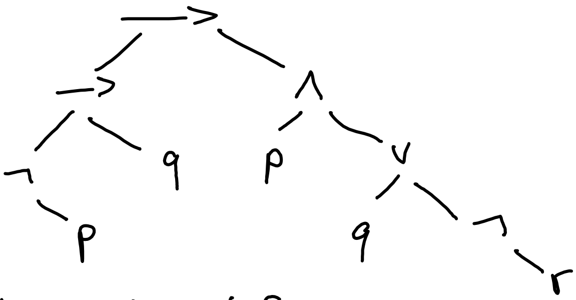
$(\underbrace{p}_{\varphi} \wedge (\underbrace{\neg q}_{\psi}))$

$(p \wedge (\neg q)) \to r$

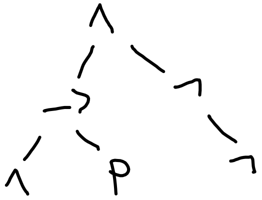


$((p \wedge (\neg q)) \to r)$

$(((\neg p) \to q) \to (p \wedge (q \vee (\neg r))))$



se a f. toda for b.F., qqer sub-árvore também é.



$((\wedge \to p) \wedge (\neg\neg))$

$(p \wedge \neg q) \to r,\ p,\ \neg r \vdash q$ (sequente)? 16

$p, q \vdash p \wedge \neg q$ ✗

DEDUÇÃO NATURAL

1) Conjunção

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge_i \to \text{introdução}$$

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \wedge e_1 \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \wedge e_2$$

Ex.: $p \wedge q,\ r \vdash q \wedge r$

1. $p \wedge q$
2. r
3. q ($\wedge e_2$ 1.)
4. $q \wedge r$ ($\wedge_i$ 3, 2)

$$\frac{\dfrac{p \wedge q}{q} \wedge e_2 \qquad r}{q \wedge r} \wedge i$$

folhas (em cima) = premissas

$(p \wedge q) \wedge r,\ s \wedge t \vdash q \wedge s$

1. $(p \wedge q) \wedge r$
2. $s \wedge t$
3. $p \wedge q$ ($\wedge e_1$ 1)
4. q ($\wedge e_2$ 3)
5. s ($\wedge e_1$ 2)
6. $q \wedge s$ ($\wedge_i$ 4, 5)

② Dupla Negação

$$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ \neg\neg e \qquad \frac{\varphi}{\neg\neg\varphi}\ \neg\neg i$$

$p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg p \wedge r$

1 p
2 $\neg\neg(q \wedge r)$
3 $\neg\neg p$ ($\neg\neg_i$ 1)
4 $q \wedge r$ ($\neg\neg_e$ 2)
5 r ($\wedge e_2$ 4)
6 $\neg\neg p \wedge r$ ($\wedge_i$ 3, 5)

③ Implicação

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ \to e \quad \text{(Modus Ponens)}$$

$p, p \to q, p \to (q \to r) \vdash r$

1. p
2 $p \to q$
3 $p \to (q \to r)$
4. q ($\to_e$ 1, 2)
5 $q \to r$ (1, 3 $\to e$)
6. r ($\to e$ 4, 5)

$$\frac{\varphi \to \psi \quad \neg\psi}{\neg\varphi}\ MT$$

$p \to (q \to r),\ p,\ \neg r \vdash \neg q$

1. $p \to (q \to r)$
2. p
3. $\neg r$
4. $q \to r$ ($\to e$ 2, 1)
5. $\neg q$ (MT 4, 3)

$$\frac{p \land q}{q}\ \land e_2$$

$$\frac{q \qquad r}{q \land r}\ \land_i$$